H29　奈良県　公立　数学　問題

数-17-公-奈良-問-01

1　次の各問いに答えよ。

問１　次の(1)～(4)を計算せよ。

(1)　$-6-8$

(2)　$-3^2\times5$

(3)　$(2ab)^2\div6a^2b\times3a$

(4)　$(x+3)^2-2(x+3)$

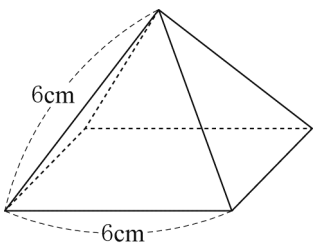
問２　方程式 $2x+y=x-5y-4=3x-y$ を解け。

問３　2 次方程式 $x^2+5x-6=0$ を解け。

問４　$a=\sqrt{5}+2$，$b=\sqrt{5}-2$ のとき，a^2-ab+b^2 の値を求めよ。

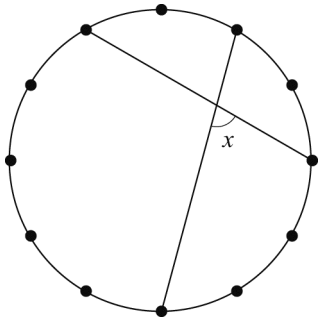
問５　**図１**は，全ての辺の長さが 6 cm の正四角すいである。
この正四角すいの体積を求めよ。

図１



問６　**図２**で，円周上の 12 点は円周を 12 等分している。$\angle x$ の大きさを求めよ。

図２

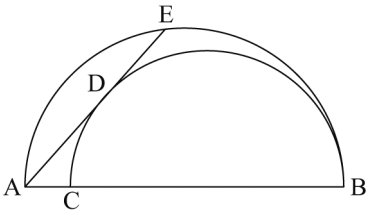


問７　同じ大きさで印のついていない玉が入っている袋の中から玉を 30 個取り出し,印をつけて戻した。よくかきまぜてから，無作為に 30 個を抽出したら，印のついた玉が 6 個含まれていた。袋の中に入っていた玉の総数を推測せよ。

問８　$\sqrt{\dfrac{180}{n}}$ が整数となるような自然数 n の値を全て求めよ。

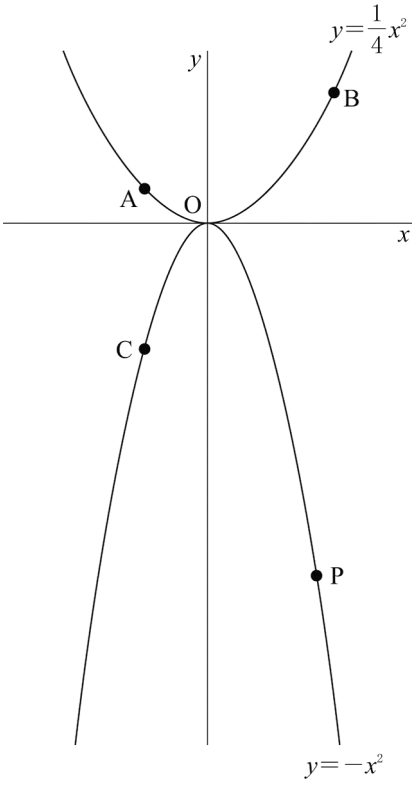
問９　**図３**のように，線分 AB 上に点 C があり，線分 AB，BC を直径とする大小 2 つの半円がある。点 A から小さい半円に接線をひき，その接点を D，大きい半円との交点を E とする。$\overset{\frown}{\mathrm{CD}} : \overset{\frown}{\mathrm{DB}} = 3 : 10$ であるとき，$\overset{\frown}{\mathrm{AE}} : \overset{\frown}{\mathrm{EB}}$ を求めよ。

図３



数-17-公-奈良-問-02

2 右の図のように，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に 2 点 A，B があり，その x 座標はそれぞれ -2，4 である。また，関数 $y=-x^2$ のグラフ上に 2 点 C，P があり，点 C の x 座標は -2，点 P はグラフ上を動く点で，その x 座標は正の数である。各問いに答えよ。



問１　関数 $y=-x^2$ について，x の変域が $-2<x<4$ のときの y の変域を求めよ。

問２　2 点 B，C を通る直線の式を求めよ。

問３　点 P の x 座標が大きくなると，それにともなって大きくなるものを，次の**ア**～**エ**から全て選び，その記号を書け。

ア　点 P の y 座標

イ　線分 AP の長さ

ウ　直線 CP の傾き

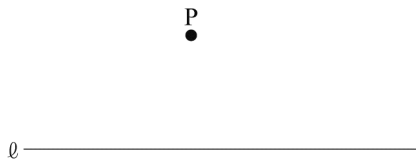
エ　△APB の面積

問４　点 P の x 座標が 3 のとき，四角形 ACPB の面積を求めよ。

数-17-公-奈良-問-03

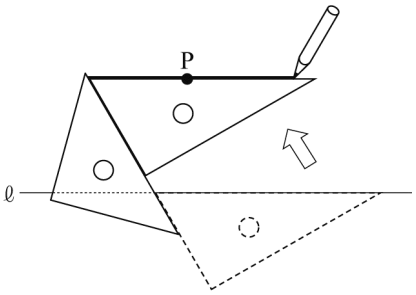
3 「**図１**において，点Ｐを通り，直線ℓに平行な直線を作図せよ。」という問題について花子さんと太郎さんが話し合っている。後の各問いに答えよ。

図１



花子：1 組の三角定規を使うと，**図２**のように，㋐三角定規の一方を固定し，もう一方を動かして直線をひけば，平行な直線がひけるね。

図２

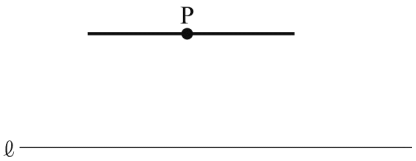


太郎：でも，**図３**のように，三角定規をとってしまうと，どのようにして平行な直線をひいたのか，他の人にはわからないね。

花子：定規とコンパスを使ったらどうかな。それなら，作図に使った線が残るよ。

太郎：じゃあ，㋑平行四辺形をかいて，平行な直線をひいてみようかな。

図３



花子：私は㋒垂線を 2 回ひくことで平行な直線をひいてみるね。

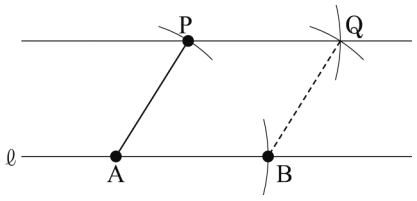
問１　下線部㋐が成り立つことを次のように示すとき，（　　）に当てはまる用語を書け。

「**図２**の直線ℓ，ひいた直線，固定した三角定規の斜辺は，2 つの直線に 1 つの直線が交わる位置関係にある。三角定規を動かしたので，（　　）が等しくなるから，直線ℓとひいた直線は平行になる。」

問２　次の［　　］内は，下線部㋑の太郎さんの考えを説明したものである。［　　］内の（　　）に当てはまる，平行四辺形になるための条件を書け。

図４のように，直線ℓ上に 2 点 A，B をとり，点Ｐと点 A を結ぶ。点Ｐを中心として，線分 AB を半径とする円をかく。点 B を中心として，線分 AP を半径とする円をかく。2 つの円の交点を Q として，直線 PQ をひく。

図４

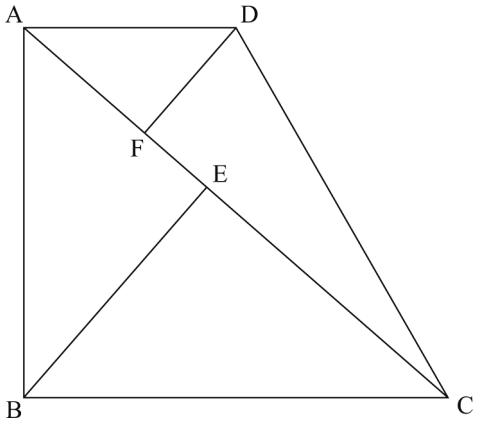


四角形 PABQ は，（　　）から平行四辺形といえる。

よって，直線 PQ は直線ℓに平行である。

問３　下線部㋒の花子さんの考えで，点Ｐを通り，直線ℓに平行な直線を，定規とコンパスを使って解答欄の枠内に作図せよ。なお，作図に使った線は消さずに残しておくこと。

4 右の図の四角形 ABCD は，AB＝$3\sqrt{3}$ cm，BC＝6 cm，AD // BC，∠ABC＝90°，∠BCD＝60°の台形である。頂点 B から線分 AC にひいた垂線と線分 AC との交点を E，頂点 D から線分 AC にひいた垂線と線分 AC との交点を F とする。各問いに答えよ。



問１　△AFD∽△CEB を証明せよ。

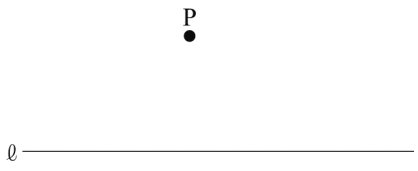
問２　∠DAF＝a° とするとき，∠CDF の大きさを a を用いて表せ。

問３　線分 BE の長さを求めよ。

問４　△ABE の面積は△CDF の面積の何倍か。

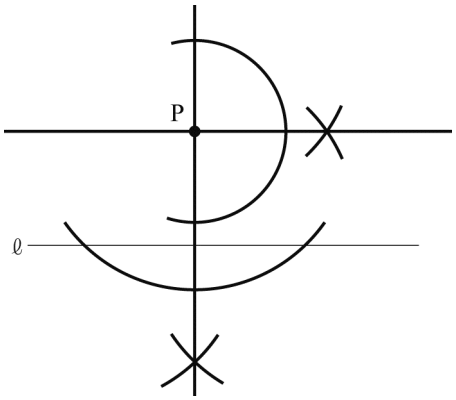
数学　解答用紙

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数−17−公−奈良−KY−01	1	問１	(1)			
			(2)			
			(3)			
			(4)			
		問２				
		問３				
		問４				
		問５		cm^3		
		問６		度		
		問７	およそ	個		
		問８	$n=$			
		問９	$\overset{\frown}{AE} : \overset{\frown}{EB} =$	:		
数−17−公−奈良−KY−02	2	問１				
		問２				
		問３				
		問４				

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数−17−公−奈良−KY−03	3	問１			
		問２			
		問３	〔作図〕		
数−17−公−奈良−KY−04	4	問１	〔証明〕		
		問２			
		問３	cm		
		問４	倍		

数学　解答

	問題番号		解答		配点	備考
数-17-公-奈良-K-01	1	問1	(1)	-14	1	
			(2)	-45	1	
			(3)	$2ab$	1	
			(4)	x^2+4x+3	1	
		問2	$x=-1,\ y=-\frac{1}{2}$		2	
		問3	$x=-6,\ x=1$		2	
		問4	17		2	
		問5	$36\sqrt{2}$　cm^3		2	
		問6	75　度		2	
		問7	およそ　150　個		2	
		問8	$n=5,\ 20,\ 45,\ 180$		3	
		問9	$\overset{\frown}{\mathrm{AE}} : \overset{\frown}{\mathrm{EB}}=6:7$		3	
数-17-公-奈良-K-02	2	問1	$-16<y\leqq 0$		2	
		問2	$y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$		2	
		問3	イ，エ		2	
		問4	50		3	

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数−17−公−奈良−K−03	3	問１	同位角	1	
		問２	2 組の対辺がそれぞれ等しい	2	
		問３	〔作図〕 (例)  	3	
数−17−公−奈良−K−04	4	問１	〔証明〕 (例) △AFD と△CEB において AD // BC より，錯角は等しいから ∠DAF＝∠BCE　……① 仮定から ∠DFA＝∠BEC＝90°　……② ①，②より 2 組の角がそれぞれ等しいから △AFD∽△CEB	3	
		問２	$30^\circ + a^\circ$	3	
		問３	$\frac{6\sqrt{21}}{7}$ cm	3	
		問４	$\frac{6}{5}$ 倍	4	

数-17-公-奈良-KS-01

1　**問1**　(1)　$-6-8=-(6+8)=-14$

(2)　$-3^2\times5=-9\times5=-45$

(3)　$(2ab)^2\div6a^2b\times3a=\dfrac{4a^2b^2\times3a}{6a^2b}=2ab$

(4)　$(x+3)^2-2(x+3)=x^2+6x+9-2x-6=x^2+4x+3$

問2　$2x+y=x-5y-4$ より，$x+6y=-4$…①　$2x+y=3x-y$ より，$x=2y$…②

②を①に代入すると，$2y+6y=-4$　よって，$y=-\dfrac{1}{2}$　これを②に代入すると，$x=-1$

問3　$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)=0$　よって，$x=-6$，1

問4　$a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab$　ここで，$a-b=(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)=4$，$ab=(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1$ だから，$(a-b)^2+ab=4^2+1=17$

問5　底面の正方形の対角線の長さは，$6\sqrt{2}$ cm　頂点と底面の対角線を通る面で切り取ったときの切り口は，辺の長さが，6 cm，6 cm，$6\sqrt{2}$ cm の二等辺三角形になる。

この二等辺三角形の高さが正四角すいの高さと等しくなるので，高さを h cm とすると，三平方の定理より，$h^2=6^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=36-18=18$　$h>0$ より，$h=3\sqrt{2}$ (cm)

よって，正四角すいの体積は，$\dfrac{1}{3}\times6\times6\times3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$ (cm^3)

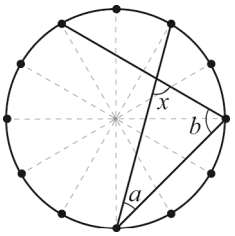
問6　12 等分してあるので，弧 1 つ分に対する中心角の大きさは，$360^\circ\div12=30^\circ$ で，円周角はその半分の 15° になる。

よって，右の図で$\angle a$ は弧 2 つ分に対する円周角なので，$\angle a=30^\circ$

また，$\angle b$ は弧 5 つ分に対する円周角なので，$\angle b=75^\circ$

よって，三角形の 3 つの内角の和は 180° になるから

$\angle x=180^\circ-(30^\circ+75^\circ)=75^\circ$



問7　袋の中に入っている玉の総数を x 個とすると，$6:30=30:x$　よって，$x=150$ となるから，袋の中に入っていた玉の総数はおよそ 150 個と推測できる。

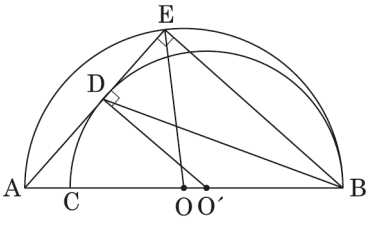
問8　A を整数とすると，$\dfrac{180}{n}=\mathrm{A}^2$ となるとき，$\sqrt{\dfrac{180}{n}}$ は整数になる。また，このとき $180=\mathrm{A}^2n$ となるから，根号の中が 2 乗の形で表すことができて，その 2 乗の数が 180 の約数となる数を見つければよい。180 の約数は，1，2，3，4，5，6，9，10，12，15，18，20，30，36，45，60，90，180

この中で 2 乗の形で表すことができるのは，1，4，9，36

それぞれのときの n の値を求めると，$\dfrac{180}{n}=1^2=1$ のとき $n=180$，$\dfrac{180}{n}=2^2=4$ のとき $n=45$，

$\dfrac{180}{n}=3^2=9$ のとき $n=20$，$\dfrac{180}{n}=6^2=36$ のとき $n=5$ となるから，$n=5$，20，45，180

問９　線分 AB の中点を O，線分 CB の中点を O′ とする。



半円の弧に対する円周角は 90° なので，∠AEB＝90°

線分 AE は点 D に対する接線なので，∠O′DE＝∠O′DA＝90°

となるから，同位角が等しくなり，O′D // BE

また，$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}:\overset{\frown}{\mathrm{DB}}=3:10$ より，∠DO′C＝$3k$°（k は自然数）とすると，∠DO′B＝$10k$° と表せるから，円周角の定理より，

$\angle \mathrm{O'BD}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{DO'C}=\frac{3}{2}k^\circ$

O′B＝O′D より，$\angle \mathrm{O'DB}=\angle \mathrm{O'BD}=\frac{3}{2}k^\circ$

O′D // BE より，平行線の錯角は等しいので，$\angle \mathrm{DBE}=\angle \mathrm{O'DB}=\frac{3}{2}k^\circ$

よって，$\angle \mathrm{AOE}=2\angle \mathrm{ABE}=2(\angle \mathrm{ABD}+\angle \mathrm{DBE})=2\left(\frac{3}{2}k^\circ+\frac{3}{2}k^\circ\right)=6k^\circ$

∠DO′C＋∠DO′B＝$13k$° ＝180° だから，$\angle \mathrm{EOB}=180^\circ-\angle \mathrm{AOE}=13k^\circ-6k^\circ=7k^\circ$

したがって，おうぎ形の弧の長さの比は，中心角の大きさの比と等しくなるから，

$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}:\overset{\frown}{\mathrm{EB}}=6k^\circ:7k^\circ=6:7$

数-17-公-奈良-KS-02

2　**問１**　下に開いているグラフで，x の変域に 0 を含むので，最大値は，x＝0 のときで y＝0

最小値は，−2 と 4 で絶対値の値の大きい x＝4 のときで，$y=-4^2=-16$　よって，y の変域は，$-16<y\leqq 0$

問２　点 B の x 座標は 4 だから y 座標は，$y=\frac{1}{4}\times 4^2=4$ で，B(4，4)　点 C の x 座標は−2 だから y 座標は，$y=-(-2)^2=-4$ で，C(−2，−4)

よって，2 点 B，C を通る直線の式の傾きは，$\frac{4-(-4)}{4-(-2)}=\frac{4}{3}$ となるから，$y=\frac{4}{3}x+b$ とおける。

この直線の式は，(4，4) を通るので x＝4，y＝4 を代入すると，$b=-\frac{4}{3}$

したがって，求める直線の式は，$y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$

問３　$y=-x^2$ のグラフは下に開いているグラフなので，x 座標が大きくなると点 P の位置は下へ動く。

ア…点 P の位置は下へ動くと y 座標の値は小さくなるので誤り。

イ…点 P の位置は下へ動くと，AP の長さは長くなるので正しい。

ウ…直線 CP の傾きの値は小さくなるから誤り。

エ…AB の長さは変わらず，高さが大きくなるので正しい。

問４　点 P の x 座標が 3 になるので，$y=-3^2=-9$ で，P(3，−9)　このとき，2 点 B，P を通る直線の式の傾きは，$\frac{4-(-9)}{4-3}=13$ となるから，$y=13x+b$ とおける。

この直線の式は，(4，4)を通るので x＝4，y＝4 を代入すると，b＝−48 となり，y＝13x−48

この直線と x 軸との交点を E とすると，$\mathrm{E}\left(\frac{48}{13},\ 0\right)$

また，直線 AC と x 軸との交点を F とすると，F(−2，0) で，A(−2，1)　よって，

四角形 ACPB＝△AFB＋△BFE＋△FCP＋△FPE$=\frac{1}{2}\times 1\times\{4-(-2)\}+\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{48}{13}\right)\times 4$

$+\frac{1}{2}\times 4\times(2+3)+\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{48}{13}\right)\times 9=3+\frac{148}{13}+10+\frac{333}{13}=50$

数-17-公-奈良-KS-03

3　**問１**　**図２**で動かす前と動かした後の三角定規の 60° の部分の作る 2 つの角を同位角という。

問２　平行四辺形になる条件は，①2 組の対辺がそれぞれ平行であるとき，②2 組の対辺がそれぞれ等しいとき，③2 組の対角がそれぞれ等しいとき，④対角線がそれぞれの中点で交わるとき，⑤1 組の対辺が等しくて平行であるときである。

点 P を中心として，線分 AB を半径とする円をかいているので，PQ＝AB がいえる。同様に AP＝BQ がいえるので，四角形 PABQ は②2 組の対辺がそれぞれ等しいから，平行四辺形といえる。

問３　花子さんの考えで作図すると同位角が 90°になり，平行な直線をかくことができる。

数-17-公-奈良-KS-04

4　**問１**　DF⊥AC，BE⊥AC より，∠AFD＝∠CEB＝90°　また，AD // BC より平行線の錯角は等しいから，∠DAF＝∠BCE　よって，2 組の角がそれぞれ等しくなるので相似が証明できる。

問２　四角形 ABCD の 4 つの内角の和は 360°だから，∠ADC＝360°－(∠DAB＋∠ABC＋∠BCD)
＝360°－(90°＋90°＋60°)＝120°

また，△AFD において，∠DAF＝a°，∠AFD＝90°より，∠ADF＝180°－(a°＋90°)＝90°－a°

よって，∠CDF＝120°－(90°－a°)＝30°＋a°

問３　∠ABC＝90°だから，三平方の定理より，$AC^2=AB^2+BC^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2+6^2=63$

AC＞0 より，AC＝$3\sqrt{7}$ (cm)　ここで AE＝x cm とおくと，EC＝$3\sqrt{7}-x$ (cm)

このとき，線分 BE について，三平方の定理より，$BE^2=BC^2-EC^2$…①，$BE^2=AB^2-AE^2$…②と 2 通りの方法で表せるから，それぞれの方法で BE^2 を，x を使って表す。

①より，$BE^2=6^2-(3\sqrt{7}-x)^2=-x^2+6\sqrt{7}\,x-27$

②より，$BE^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2-x^2=-x^2+27$　よって，$-x^2+6\sqrt{7}\,x-27=-x^2+27$

整理すると，$x=\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$ (cm)だから，$BE^2=-\left(\dfrac{9\sqrt{7}}{7}\right)^2+27=\dfrac{756}{49}$　BE＞0 より，$BE=\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$ (cm)

問４　$\triangle ABE=\dfrac{1}{2}\times AE\times BE=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{6\sqrt{21}}{7}=\dfrac{27\sqrt{3}}{7}$ (cm^2)

$\triangle CDF=\dfrac{1}{2}\times CF\times DF$ だから，CF，DF の長さをそれぞれ求める。まず，DF は△ACD において，

辺 AC を底辺と見たときの高さだから，$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{7}\times DF=\dfrac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}$　よって，$DF=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$ (cm)

△ADF において，三平方の定理より，$AF^2=AD^2-DF^2=3^2-\left(\dfrac{3\sqrt{21}}{7}\right)^2=\dfrac{252}{49}$

AF＞0 より，$AF=\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$ (cm)　よって，$CF=3\sqrt{7}-\dfrac{6\sqrt{7}}{7}=\dfrac{15\sqrt{7}}{7}$ (cm)

したがって，$\triangle CDF=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{3\sqrt{21}}{7}=\dfrac{45\sqrt{3}}{14}$ (cm^2) だから，△ABE の面積は，△CDF の面積の，$\dfrac{27\sqrt{3}}{7}\div\dfrac{45\sqrt{3}}{14}=\dfrac{6}{5}$ (倍)