H29　大阪府（C）　公立　数学　問題

数-17-公-大阪（C）-問-01

1　次の問いに答えなさい。

問１　$\left(-\frac{1}{3}ab^2\right)^2\times(-2a^4b)\div\frac{1}{6}(a^2b)^3$　を計算しなさい。

問２　$\frac{(3\sqrt{2}+2)(3\sqrt{2}-2)}{\sqrt{6}}-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$　を計算しなさい。

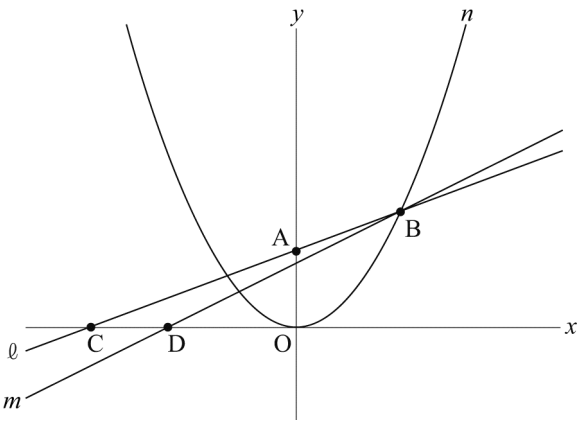
問３　$ab^2-2ab-2b+4$　を因数分解しなさい。

問４　二次方程式　$(x-29)^2-3(x-30)-31=0$　を解きなさい。

問５　F さんの高校の文化祭は 2 日間実施された。F さんのクラスではお菓子とジュースを販売することになり，文化祭の前日にお菓子を 140 個，ジュースを 240 本仕入れた。文化祭の 1 日目においては，お菓子を 1 個 100 円で，ジュースを 1 本 80 円でそれぞれ販売し，お菓子が x 個，ジュースが y 本売れた。文化祭の 2 日目においては，お菓子 1 個とジュース 1 本とをセットにして 160 円で販売し，セット以外の販売は行わなかった。文化祭の 2 日目が終了したとき，お菓子は 12 個残ったが，ジュースは全部売り切れた。2 日間の売り上げ金額の合計が 30560 円であるとき，x，y の値をそれぞれ求めなさい。ただし，x，y はともに自然数であるとし，消費税は考えないものとする。

問６　1 から 8 までの自然数が書いてある 8 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$，$\boxed{8}$ が箱に入っている。この箱から 2 枚のカードを同時に取り出し，取り出した 2 枚のカードに書いてある数の積を a，箱の中に残っている 6 枚のカードに書いてある数の和を b とするとき，$a+b$ が 40 より大きい偶数である確率はいくらですか。どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとして答えなさい。

問７　右図において，n は $y=ax^2$ $(a>0)$ のグラフを表す。A は y 軸上の点であり，A の y 座標は 1 である。B は n 上の点であり，B の x 座標は正である。ℓ は 2 点 A，B を通る直線であり，その傾きは正である。C は直線 ℓ と x 軸との交点であり，C の x 座標は B の x 座標より 4 小さい。m は，B を通り傾きが $\frac{1}{2}$ の直線である。D は直線 m と x 軸との交点であり，D の x 座標は B の x 座標より 3 小さい。このとき，a の値を求めなさい。



問８　n を自然数とするとき，$\frac{n+110}{13}$ と $\frac{240-n}{7}$ の値がともに自然数となる n の値を**すべて**求めなさい。求め方も書くこと。

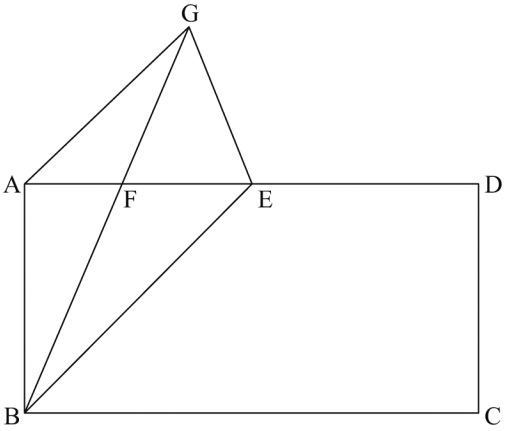
数-17-公-大阪（C）-問-02

2　**図１**，**図２**において，四角形 ABCD は AB＝3 cm，AD＝6 cm の長方形である。E は辺 AD の中点である。E と B とを結ぶ。F は，線分 AE 上にあって A，E と異なる点である。G は直線 BF 上にあって F について B と反対側にある点であり，3 点 A，E，G を結んでできる△AEG は AE＝AG の二等辺三角形である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は，根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

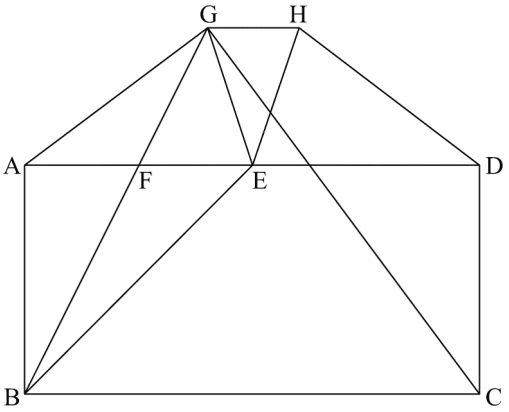
問１　**図１**において，△EFB∽△GEB であることを証明しなさい。

図１



問２　**図２**は，**図１**においてFが線分AEの中点であるときの状態を示している。

図２において，Hは直線ADについてGと同じ側にある点であり，3点D，E，Hを結んでできる△DEHは△AEGと合同な三角形である。GとH，GとCとをそれぞれ結ぶ。このとき，GH // ADである。



(1) 線分GEの長さを求めなさい。

(2) 線分GHの長さを求めなさい。

(3) 四角形GCDHの面積を求めなさい。

数-17-公-大阪(C)-問-03

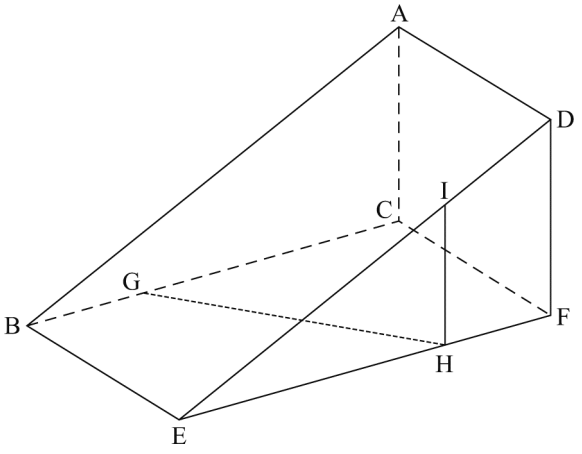
3　**図１**～**図３**において，立体ABC－DEFは三角柱である。△ABCと△DEFは合同な三角形であり，AC＝4 cm，BC＝8 cm，∠ACB＝90°である。四角形ACFDは正方形であり，四角形ABED，CBEFは長方形である。Gは，辺BC上にあってB，Cと異なる点である。Hは辺EF上の点であり，HF＝BGである。GとHとを結ぶ。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は，根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

問１　**図１**において，Iは Hを通り辺DFに平行な直線と辺DEとの交点である。

BG＝HF＝x cmとし，$0<x<8$とする。

図１

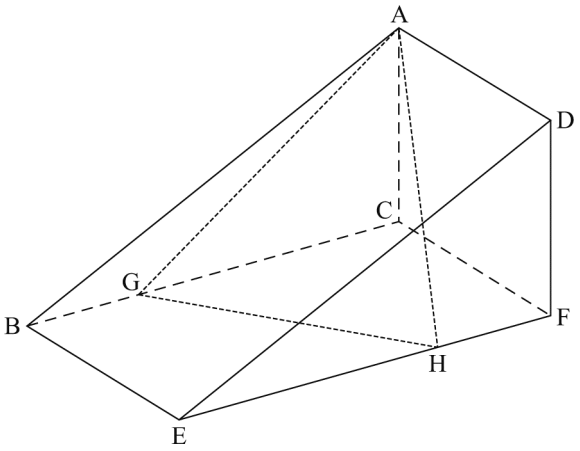


(1) 線分IHの長さをxを用いて表しなさい。

(2) 四角形CGHFの面積が四角形IHFDの面積の2倍であるときのxの値を求めなさい。

問２　**図２**において，A と G，A と H とをそれぞれ結ぶ。AG＝AH である。△AGH の面積を求めなさい。

図２

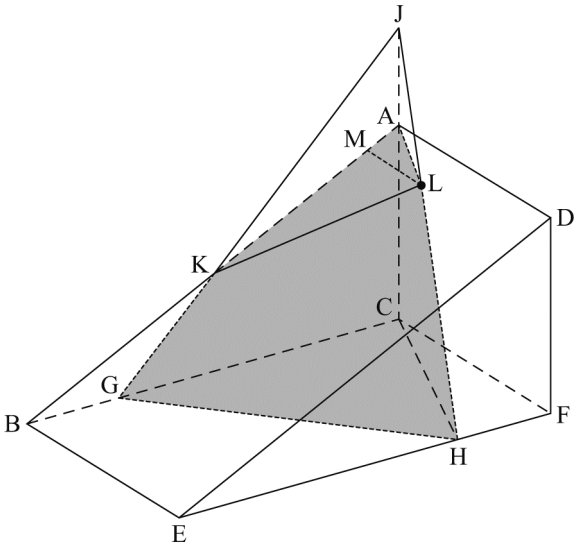


問３　**図３**において，BG＝HF＝2 cm である。C と H とを結ぶ。J は直線 AC 上にあって A について C と反対側にある点であり，JA＝2 cm である。J と G，J と H とをそれぞれ結ぶ。K は，線分 JG と辺 AB との交点である。L は，線分 JH と平面 ABED との交点である。M は，L を通り辺 AD に平行な直線と辺 AB との交点である。このとき，直線 LM は平面 ABC と垂直である。A と L，K と L とをそれぞれ結ぶ。

(1) 線分 LM の長さを求めなさい。

(2) 立体 AKL－CGH の体積を求めなさい。

図３



数学　解答用紙

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数−17−公−大阪（C）−KY−01	1	問１			
		問２			
		問３			
		問４			
		問５	$x=$　　，$y=$		
		問６			
		問７			
		問８	〔求め方〕 n の値		

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-17-公-大阪(C)-KY-02	2	問１	〔証明〕			
		問２	(1)	cm		
			(2)	cm		
			(3)	cm^2		
数-17-公-大阪(C)-KY-03	3	問１	(1)	cm		
			(2)			
		問２		cm^2		
		問３	(1)	cm		
			(2)	cm^3		

数学　解答

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-17-公-大阪(C)-K-01	1	問１	$-\frac{4}{3}b^2$	4	
		問２	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	4	
		問３	$(b-2)(ab-2)$	4	
		問４	$x=25$，$x=36$	4	他の表現でも内容が正しければよい。
		問５	$x=56$，$y=168$	6	
		問６	$\frac{1}{7}$	6	
		問７	$\frac{27}{32}$	6	
		問８	〔求め方〕 s，t を自然数として， $\frac{n+110}{13}=s$ と表せるから　$n=13s-110$　……㋐ $\frac{240-n}{7}=t$ と表せるから　$n=240-7t$　……㋑ ㋐，㋑より　$13s-110=240-7t$　だから $13s=7(50-t)$　……㋒ ㋒において，左辺は 13 の倍数だから　右辺も 13 の倍数。 また，左辺は正の数だから　右辺も正の数。 よって　$t=11$　または　$t=24$　または　$t=37$ $t=11$ のとき，$s=21$ となり　$n=163$ この s，t，n の値は問題に適している。 $t=24$ のとき，$s=14$ となり　$n=72$ この s，t，n の値は問題に適している。 $t=37$ のとき，$s=7$ となり　$n=-19$ この s，t，n の値は問題に適さない。 n の値　72，163	8	・求め方は，他の内容でも正しければよい。 ・部分点を与える。

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-17-公-大阪(C)-K-02	2	問１	〔証明〕 △EFB と△GEB において ∠EBF＝∠GBE (共通)　……㋐ ∠FEB＝45°　……㋑ A を中心として，半径 3 cm の円 A を考えると，3 点 B, E, G は円 A の周上の点である。 一つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分であるから $\angle EGB=\frac{1}{2}\angle EAB=45°$　……㋒ ㋑，㋒より　∠FEB＝∠EGB　……㋓ ㋐，㋓より，2 組の角がそれぞれ等しいから △EFB∽△GEB		8	・他の証明でも正しければよい。 ・部分点を与える。
		問２	(1)	$\frac{3\sqrt{10}}{5}$ cm	5	
			(2)	$\frac{6}{5}$ cm	5	
			(3)	$\frac{162}{25}$ cm^2	5	
数-17-公-大阪(C)-K-03	3	問１	(1)	$\frac{8-x}{2}$ cm	5	
			(2)	$8-4\sqrt{2}$	5	
		問２	$6\sqrt{5}$ cm^2		5	
		問３	(1)	$\frac{8}{5}$ cm	5	
			(2)	$\frac{328}{15}$ cm^3	5	

数-17-公-大阪（C）-KS-01

1　問１　$\left(-\frac{1}{3}ab^2\right)^2\times(-2a^4b)\div\frac{1}{6}\left(a^2b\right)^3=\frac{1}{9}a^2b^4\times(-2a^4b)\times\frac{6}{a^6b^3}=\frac{a^2b^4\times\left(-2a^4b\right)\times6}{9\times a^6b^3}$

$=-\frac{4}{3}b^2$

問２　$\frac{\left(3\sqrt{2}+2\right)\left(3\sqrt{2}-2\right)}{\sqrt{6}}-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{18-4}{\sqrt{6}}-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{14\sqrt{6}}{6}-\frac{3\sqrt{6}}{6}-\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

問３　$ab^2-2ab-2b+4=ab^2-2b-2ab+4=b(ab-2)-2(ab-2)=(b-2)(ab-2)$

問４　$(x-29)^2-3(x-30)-31=0$　$x-29=\mathrm{A}$ とおくと，$\mathrm{A}^2-3(\mathrm{A}-1)-31=0$　$\mathrm{A}^2-3\mathrm{A}-28=0$

$(\mathrm{A}-7)(\mathrm{A}+4)=0$　元に戻すと，$(x-29-7)(x-29+4)=0$　$(x-36)(x-25)=0$　よって，$x=25$，36

問５　1 日目の売り上げは，$(100x+80y)$ 円，2 日目の売り上げは，$160(240-y)$ 円で，これらの和が 30560 円なので，$(100x+80y)+160(240-y)=30560$　整理すると，$5x-4y=-392$…①

また，2 日目が終了したとき，お菓子が 12 個残ったので，$140-x-(240-y)=12$

整理すると，$-x+y=112$…②

①＋②×4 より，$x=56$　これを②に代入して，$y=168$

問６　2 枚のカードを同時に取り出したときの b の値をまとめると，右の表のようになる。

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		33	32	31	30	29	28	27
2			31	30	29	28	27	㉖
3				29	28	27	26	25
4					27	㉖	25	㉔
5						25	24	23
6							23	㉒
7								21
8								

この中で，$a+b$ が 40 より大きい偶数になるのは○をつけた 4 通り。

カードの取り出し方は，全部で 28 通りだから，求める確率は，

$\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$

問７　点 B の座標を（p，q）とおく。このとき，D の座標は（$p-3$，0）となるから，直線 m の傾きは，$\frac{q-0}{p-(p-3)}$ と表せる。これが $\frac{1}{2}$ になるので，$\frac{q}{p-(p-3)}=\frac{1}{2}$　整理すると，$q=\frac{3}{2}$

また，点 C の座標は$(p-4,\ 0)$となるので，直線 ℓ の傾きを求めると，$\left(\frac{3}{2}-0\right)\div\{p-(p-4)\}=\frac{3}{8}$

y 軸との交点は A になり，y 座標が 1 なので，直線 ℓ の式は，$y=\frac{3}{8}x+1$

これに $y=\frac{3}{2}$ を代入して整理すると，$x=\frac{4}{3}$ となるから，$\mathrm{B}\left(\frac{4}{3},\ \frac{3}{2}\right)$

よって，$x=\frac{4}{3}$，$y=\frac{3}{2}$ を $y=ax^2$ に代入して整理すると，$a=\frac{27}{32}$

問８　s，t を自然数とするとき，$\dfrac{n+110}{13}=s$，$\dfrac{240-n}{7}=t$ と表せるとする。

これらを n について解くと，$\dfrac{n+110}{13}=s$ より，$n=13s-110$…㋐

$\dfrac{240-n}{7}=t$ より，$n=-7t+240$…㋑　㋐，㋑より，$13s-110=-7t+240$　$13s=-7t+350$

$13s=-7(t-50)$…㋒

㋒において，左辺が 13 の倍数になっているので，右辺も 13 の倍数になるから，$t-50$ は 13 の倍数とわかる。

また，$13s>0$ より $-7(t-50)>0$ となるから，$t-50<0$ もいえる。

よって，$t-50=-13$，-26，-39，-52，…で，それぞれ $t=37$，24，11，-2，…となる。

$n=-7t+240$ に $t=37$ 代入すると $n=-19$，$s=7$ となり不適。

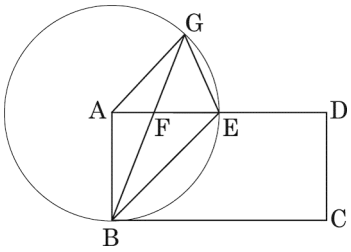
同様に $t=24$ のとき $n=72$，$s=14$ となり，問題に適している。

$t=11$ のとき $n=163$，$s=21$ となり，問題に適している。

したがって，72，162

数-17-公-大阪（C）-KS-02

2　**問１**　AB＝AE＝AG＝3 cm なので，点 A を中心とし，半径 3 cm の円をかくと右のようになる。



このとき，円周角の定理より，$\angle BGE=\dfrac{1}{2}\angle BAE=45^\circ$…①

また，△ABE は AB＝AE，$\angle EAB=90^\circ$ の直角二等辺三角形だから，$\angle AEB=45^\circ$…②　①，②より，$\angle BEF=\angle BGE$…③

共通な角だから，$\angle EBF=\angle GBE$…④

③，④より，2 組の角がそれぞれ等しいので，△EFB∽△GEB

問２　(1) △EFB∽△GEB より，GE：EB＝EF：FB だから，EB，EF，FB のそれぞれの辺の長さを求めて，GE を求める。$AE=\dfrac{1}{2}AD=3$ (cm) で，点 F は線分 AE の中点だから，$AF=EF=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{3}{2}$ (cm)

△ABF において，$\angle FAB=90^\circ$ だから三平方の定理より，$BF^2=AB^2+AF^2=3^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{45}{4}$

$BF>0$ より，$BF=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ (cm)　また，△ABE は直角二等辺三角形だから，AB：BE＝1：$\sqrt{2}$ より，

$BE=3\sqrt{2}$　よって，GE：$3\sqrt{2}=\dfrac{3}{2}:\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ となるから，$GE=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$ (cm)

(2) △AEG≡△DEH だから対応する辺の長さは等しいので，EG＝EH

よって，△EGH は二等辺三角形になる。また，GH // AD より平行線の錯角は等しいから，

$\angle AEG=\angle EGH$ となるので，$\angle AGE=\angle AEG=\angle EGH=\angle EHG$ となり，△AEG∽△EHG

よって，AG：GE＝EG：GH より，$3:\dfrac{3\sqrt{10}}{5}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}:GH$　整理すると，$GH=\dfrac{6}{5}$

(3) 辺 AD と線分 GC の交点を P とする。四角形 GCDH を台形 GPDH と△PCD に分けて考える。
まず，PD＝AD－AF－FP を使って，PD の長さを求める。
AD // BC より，平行線と線分の比の関係から，GF : FP＝GB : BC
ここで，△EFB∽△GEB より，BG : BE＝BE : BF だから，BG : $3\sqrt{2}=3\sqrt{2}:\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$
BG＝$\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$(cm)　GF＝GB－FB より，GF＝$\dfrac{12\sqrt{5}}{5}-\dfrac{3\sqrt{5}}{2}=\dfrac{9\sqrt{5}}{10}$(cm)
よって，$\dfrac{9\sqrt{5}}{10}$: FP＝$\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$: 6 より，FP＝$\dfrac{9}{4}$(cm)となるから，PD＝$6-\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{4}$(cm)
次に線分 GH と辺 AD の距離を求める。この距離は△GEH の高さと等しくなる。△GEH は，辺の長さが$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$cm，$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$cm，$\dfrac{6}{5}$cm の二等辺三角形だから，高さ h は，$h^2=\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2-\left(\dfrac{6}{5}\times\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{81}{25}$　$h>0$ より，$h=\dfrac{9}{5}$(cm)　したがって，四角形 GCDH＝台形 GPDH＋△PCD
$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{6}{5}+\dfrac{9}{4}\right)\times\dfrac{9}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{4}\times3=\dfrac{621}{200}+\dfrac{27}{8}=\dfrac{162}{25}$(cm²)

数-17-公-大阪(C)-KS-03

3　**問１**　(1)　△DEF において，IH // DF となるから，平行線と線分の比の関係より，
EF : DF＝EH : IH　EH＝EF－HF＝8－x となるから，8 : 4＝(8－x) : IH　IH＝$\dfrac{8-x}{2}$(cm)

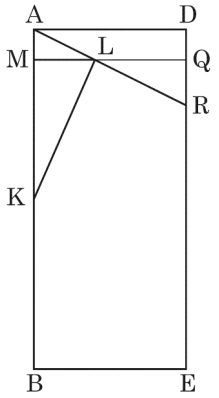
(2) 四角形 CGHF＝$\dfrac{1}{2}\times\{x+(8-x)\}\times4=16$　四角形 IHFD＝$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{8-x}{2}+4\right)\times x=\dfrac{16x-x^2}{4}$
四角形 CGHF の面積が四角形 IHFD の面積の 2 倍なので，$16=\dfrac{16x-x^2}{4}\times2$
整理すると，$x^2-16x+32=0$　解の公式より，$x=\dfrac{-(-16)\pm\sqrt{16^2-4\times1\times32}}{2\times1}=8\pm4\sqrt{2}$
$0<x<8$ より，$x=8-4\sqrt{2}$ (cm)

問２　AG＝AH となるときの x の値を求める。
△AGC において，∠ACG＝90° だから三平方の定理より，$AG^2=AC^2+GC^2=4^2+(8-x)^2$
また，△AHF において，∠AFH＝90° だから三平方の定理より，$AH^2=AF^2+HF^2$
ここで，辺 AF は 1 辺 4cm の正方形の対角線なので，AF＝$4\sqrt{2}$ cm となるから，$AH^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2+x^2$
AG＝AH より，$4^2+(8-x)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2+x^2$　整理すると，$x=3$
次に，点 G を通り，辺 BE に平行な直線と EF との交点を P とすると，∠GPH＝90° だから三平方の定理より，$GH^2=GP^2+PH^2=4^2+(8-2\times3)^2=20$　GH＞0 より，GH＝$2\sqrt{5}$ cm
また，$AG^2=4^2+5^2=41$　AG＞0 より，AG＝$\sqrt{41}$ cm
よって，△AGH は，$\sqrt{41}$ cm，$\sqrt{41}$ cm，$2\sqrt{5}$ cm の二等辺三角形になるので，高さ h は，
$h^2=\left(\sqrt{41}\right)^2-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2=36$　$h>0$ より，$h=6$(cm)　よって，△AGH＝$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times6=6\sqrt{5}$ (cm²)

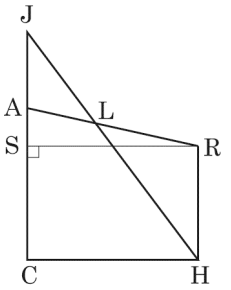
問３　**図３**を３つの方向から見た図をそれぞれかくと下の**図ア**，**図イ**，**図ウ**のようになる。

図中の点 Q は ML を L のほうにのばし辺 ED との交点，点 R は AL を L の方にのばし辺 ED との交点とする。また点 S は点 R から辺 AC に引いた垂線との交点，点 T は点 G を通り辺 AC に平行な線と辺 AB との交点，点 U は点 K を通り辺 BC に平行な線と辺 AC との交点とする。

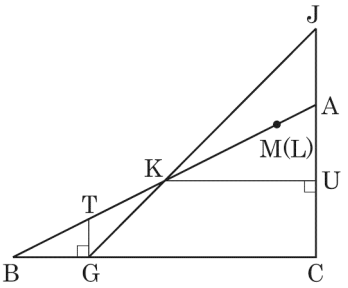
図ア



図イ



図ウ



(1)　**図ア**において AD // BE，AB // DE より，△AML∽△RQL となるので，AL : LM がわかれば MQ＝AD＝4 cm より線分 LM の長さがわかる。

図３より，△CHF において∠CFH＝90° となるから，三平方の定理より，$CH^2=CF^2+HF^2=4^2+2^2=20$　CH＞0 より，$CH=2\sqrt{5}$ cm　点 R は**問１**(1)の点 I だから $RH=\dfrac{8-2}{2}=3$ (cm) より，**図イ**において，AS＝AC－RH＝4－3＝1 (cm)　よって，△ASR において∠ASR＝90° となるから，三平方の定理より，$AR^2=AS^2+SR^2=1^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{21}$　また，JC // RH となるから，△JAL∽△HRL で，相似比は，AL : LR＝JA : HR＝2 : 3　したがって，**図ア**で，LM : LQ＝AL : LR＝2 : 3 だから，

$LM=\dfrac{2}{5}AD=\dfrac{2}{5}\times4=\dfrac{8}{5}$(cm)

(2)　立体 AKL－CGH の体積は，三角錐 J－CGH の体積から三角錐 L－JKA の体積を引けばよい。

三角錐 J－CGH の体積は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times6\times4\times6=24$ (cm^3)

ここで，**図ウ**より，△ABC において∠ACB＝90° より，$AB^2=AC^2+BC^2=4^2+8^2=80$

AB＞0 より，$AB=4\sqrt{5}$ (cm)　平行線と線分の関係から，BG : GT＝BC : CA より，2 : GT＝8 : 4

GT＝1(cm)　△TBG において∠TGB＝90° より，$TB^2=TG^2+BG^2=1^2+2^2=5$　TB＞0 より，

$TB=\sqrt{5}$ (cm)　よって，$AT=4\sqrt{5}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ で，AK : KT＝JA : GT＝2 : 1 だから，

$AK=\dfrac{2}{3}AT=\dfrac{2}{3}\times3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ (cm)　平行線と線分の関係から，JG : GC＝JK : KU より，

3 : 6＝2 : KU で，KU＝4 (cm)　よって，三角錐 L－JKA の体積は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times4\times\dfrac{8}{5}=\dfrac{32}{15}$($cm^3$)

となるから，立体 AKL－CGH の体積は，$24-\dfrac{32}{15}=\dfrac{328}{15}$ (cm^3)