Ｒ６　大阪府（Ｃ）　公立　数学　問題

数-24-公-大阪(C)-問-01

1　次の問いに答えなさい。

問１　$\dfrac{2x-3y}{4}+\dfrac{x+4y}{6}$　を計算しなさい。

問２　$(1+\sqrt{6})^2-\dfrac{\sqrt{8}+10\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　を計算しなさい。

問３　二次方程式　$(x-7)^2-4(x-7)=0$　を解きなさい。

問４　a，b を定数とする。関数 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ について，x の変域が $-6\leqq x\leqq a$ のときの y の変域が $-16\leqq y\leqq b$ であるとき，a，b の値をそれぞれ求めなさい。

問５　x を有理数とする。$\dfrac{35}{12}x$ と $\dfrac{21}{20}x$ の値がともに自然数となる最も小さい x の値を求めなさい。

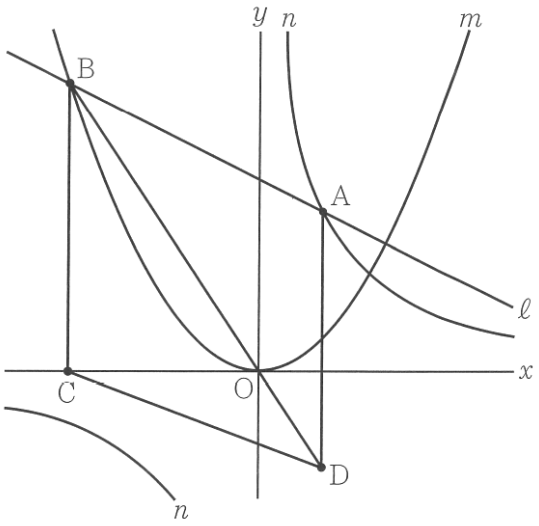
問６　二つの箱 A, B がある。箱 A には奇数の書いてある 3 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$ が入っており，箱 B には偶数の書いてある 3 枚のカード $\boxed{4}$，$\boxed{6}$，$\boxed{8}$ が入っている。A，B それぞれの箱から同時にカードを 1 枚ずつ取り出し，箱 A の中に残っている 2 枚のカードに書いてある数の和を a，箱 B の中に残っている 2 枚のカードに書いてある数の和を b，箱 A から取り出したカードに書いてある数と箱 B から取り出したカードに書いてある数との和を c とする。このとき，$a<c<b$ である確率はいくらですか。A，B それぞれの箱において，どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとして答えなさい。

問７　a を十の位の数が 0 でない 3 けたの自然数とし，b を a の百の位の数と十の位の数とを入れかえてできる 3 けたの自然数とする。ただし，b の一の位の数は a の一の位の数と同じとする。次の二つの条件を同時に満たす a の値を**すべて**求めなさい。

・$\sqrt{\dfrac{a-b}{2}}$ の値は自然数である。

・a の百の位の数と十の位の数と一の位の数との和は 20 である。

問８　a，b を正の定数とする。右の図において，m は関数 $y=ax^2$ のグラフを表し，n は関数 $y=\dfrac{b}{x}$ のグラフを表す。A は n 上の点であり，その x 座標は 1 である。B は m 上の点であり，その x 座標は -3 である。ℓ は，2 点 A，B を通る直線である。C は，B を通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点である。D は，A を通り y 軸に平行な直線と直線 BO との交点である。C と D とを結ぶ。ℓ の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ であり，四角形 ABCD の面積は 17 cm^2 である。a，b の値をそれぞれ求めなさい。答えを求める過程がわかるように，途中の式を含めた求め方も説明すること。ただし，原点 O から点 (1, 0) までの距離，原点 O から点 (0, 1) までの距離はそれぞれ 1 cm であるとする。



数-24-公-大阪(C)-問-02

2　**図１**，**図２**において，△ABC は∠BAC＝90°の直角三角形であり，BC＝4 cm，AB＜AC である。点 O は，3 点 A，B，C を通る円の中心である。このとき，O は辺 BC の中点である。△OAD は OA＝OD の二等辺三角形であり，D は円 O の周上にあって直線 BC について A と反対側にある。半周より短い弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$について，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=2\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$である。E は，辺 AD と線分 BO との交点である。B と D とを結ぶ。

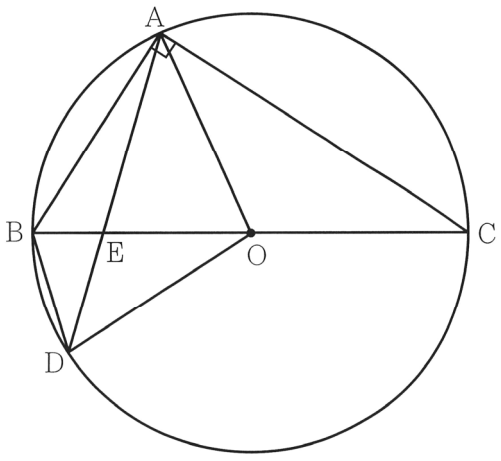
円周率を π として，次の問いに答えなさい。

問１　**図１**において，

(1) 中心角の大きさが 180° より小さいおうぎ形 ODC について，中心角∠DOC の大きさを $a°$ とするとき，おうぎ形 ODC の面積を a を用いて表しなさい。

(2) △BDO∽△AEC であることを証明しなさい。

図１

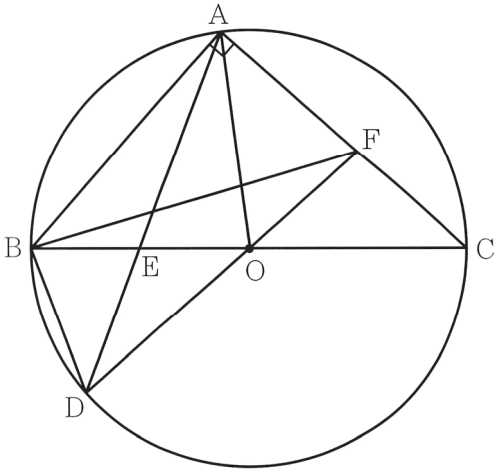


問２　**図２**において，BE＝1 cm である。F は，直線 DO と辺 AC との交点である。B と F とを結ぶ。

(1) 辺 AB の長さを求めなさい。

(2) 線分 BF の長さを求めなさい。

図２



数-24-公-大阪(C)-問-03

3　**図１**, **図２**において, 立体 ABCD－EFGH は四角柱である。四角形 ABCD は AD // BC の台形であり, ∠ADC＝∠DCB＝90° である。AD＝2 cm，DC＝BC＝4 cm である。四角形 EFGH≡四角形 ABCD である。四角形 HGCD，GFBC は 1 辺の長さが 4 cm の正方形であり，四角形 HEAD，EFBA は長方形である。

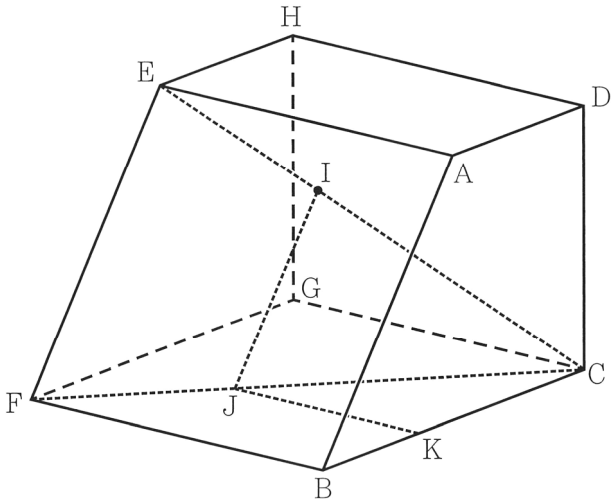
次の問いに答えなさい。

問１　**図１**において，E と C，F と C とをそれぞれ結ぶ。I は，線分 EC 上の点である。J は，I を通り辺 EF に平行な直線と線分 FC との交点である。

K は，J を通り辺 FB に平行な直線と辺 BC との交点である。

(1) △BCF を直線 FC を軸として 1 回転させてできる立体の体積は何 cm^3 ですか。円周率を π として答えなさい。

図１



(2) 線分 EC の長さを求めなさい。

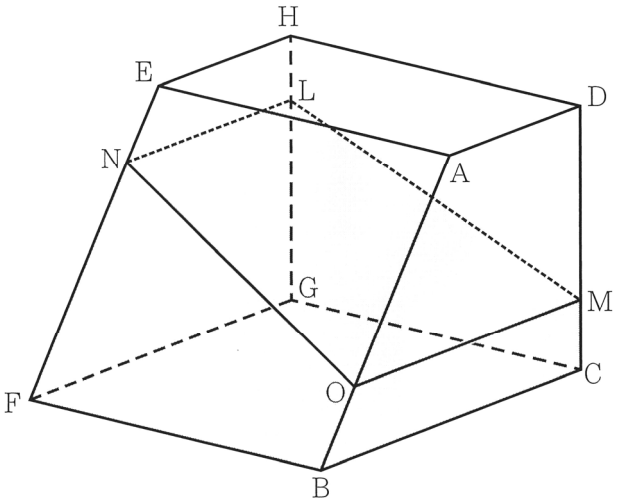
(3) EI＝JK であるときの線分 EI の長さを求めなさい。

問２　**図２**において，L，M はそれぞれ辺 HG，DC 上の点であり，HL＝MC＝1 cm である。L と M とを結ぶ。N は，L を通り辺 FG に平行な直線と辺 EF との交点である。O は，M を通り辺 BC に平行な直線と辺 AB との交点である。このとき，NL // OM である。N と O とを結ぶ。

(1) 線分 OM の長さを求めなさい。

(2) 立体 OBCM－NFGL の体積を求めなさい。

図２



Ｒ６　大阪府（C）　公立　数学　解答用紙

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-24-公-大阪(C)-KY-01	1	問１			
		問２			
		問３			
		問４	a の値　　b の値		
		問５			
		問６			
		問７			
		問８	〔求め方〕 a の値　　，b の値		

	問題番号			解　　答	配点	備　　考
数-24-公-大阪(C)-KY-02	2	問１	(1)	cm^2		
			(2)	〔証　明〕		
		問２	(1)	cm		
			(2)	cm		
数-24-公-大阪(C)-KY-03	3	問１	(1)	cm^3		
			(2)	cm		
			(3)	cm		
		問２	(1)	cm		
			(2)	cm^3		

数学　解答

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-24-公-大阪(C)-ｋ-01	1	問１	$\dfrac{8x-y}{12}$	4	
		問２	$5-3\sqrt{6}$	4	
		問３	$x=7$，$x=11$	5	
		問４	a の値　8　／　b の値　0	5	
		問５	$\dfrac{60}{7}$	6	
		問６	$\dfrac{5}{9}$	6	
		問７	839，947	6	
		問８	〔求め方〕 A は n 上の点だから　A$(1,\ b)$ B は m 上の点だから　B$(-3,\ 9a)$ ℓ の傾きは$-\dfrac{1}{2}$だから　$\dfrac{b-9a}{4}=-\dfrac{1}{2}$ …… ㋐ BC$=9a$ (cm) 直線 BO の式は $y=-3ax$ であり，D は直線 BO 上の点だから　D$(1,\ -3a)$ よって　AD$=3a+b$ (cm) 四角形 ABCD の面積は 17 cm^2 だから $\dfrac{1}{2}\times(12a+b)\times4=17$ …… ㋑ ㋐，㋑を連立させて解くと $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{5}{2}$ ―――――― (＊) a の値　$\dfrac{1}{2}$　，b の値　$\dfrac{5}{2}$	8	・部分点を与える。 ・(＊) において，「この a，b の値は問題に適している。」という記述を省略している。この記述がなくても減点の対象とはしない。

	問題番号		解答		配点	備考
数-24-公-大阪(C)-K-02	2	問1	(1)	$\frac{1}{90}\pi a$ cm^2	4	
			(2)	〔証　明〕 △BDO と△AEC において 同じ弧に対する円周角は等しいから ∠DBO＝∠EAC …… ㋐ $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{BD}$だから　∠AOB＝2∠BOD よって　$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle AOB$ …… ㋑ 一つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分だから $\angle ACE=\frac{1}{2}\angle AOB$ …… ㋒ ㋑，㋒より　∠BOD＝∠ACE …… ㋓ ㋐，㋓より，2 組の角がそれぞれ等しいから △BDO∽△AEC	8	部分点を与える。
		問2	(1)	$\sqrt{7}$ cm	4	
			(2)	$\frac{2\sqrt{22}}{3}$ cm	6	
数-24-公-大阪(C)-K-03	3	問1	(1)	$\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3	4	
			(2)	6 cm	4	
			(3)	$\frac{12}{5}$ cm	6	
		問2	(1)	$\frac{7}{2}$ cm	4	
			(2)	$\frac{83}{3}$ cm^3	6	

数-24-公-大阪(C)-KS-01

1　【小問集合】

問１　$\dfrac{2x-3y}{4}+\dfrac{x+4y}{6}=\dfrac{3(2x-3y)}{12}+\dfrac{2(x+4y)}{12}=\dfrac{3(2x-3y)+2(x+4y)}{12}=\dfrac{6x-9y+2x+8y}{12}=\dfrac{8x-y}{12}$

問２　$(1+\sqrt{6})^2-\dfrac{\sqrt{8}+10\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=1^2+2\times1\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2-\dfrac{(\sqrt{8}+10\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=1+2\sqrt{6}+6-\dfrac{4+10\sqrt{6}}{2}=7+2\sqrt{6}-(2+5\sqrt{6})=7+2\sqrt{6}-2-5\sqrt{6}=5-3\sqrt{6}$

問３　$x-7=A$ とおくと，二次方程式は，$A^2-4A=0$ となる。$A(A-4)=0$ より，$A=0$，4

$A=0$ のとき，$x-7=0$ より，$x=7$　　$A=4$ のとき，$x-7=4$ より，$x=11$

よって，二次方程式の解は，$x=7$，11

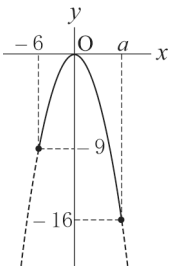
問４　関数 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ で，$x=-6$ のとき，$y=-\dfrac{1}{4}\times(-6)^2=-9$ だから，

図１のように，$x=a$ のとき，$y=-16$ であることがわかる。

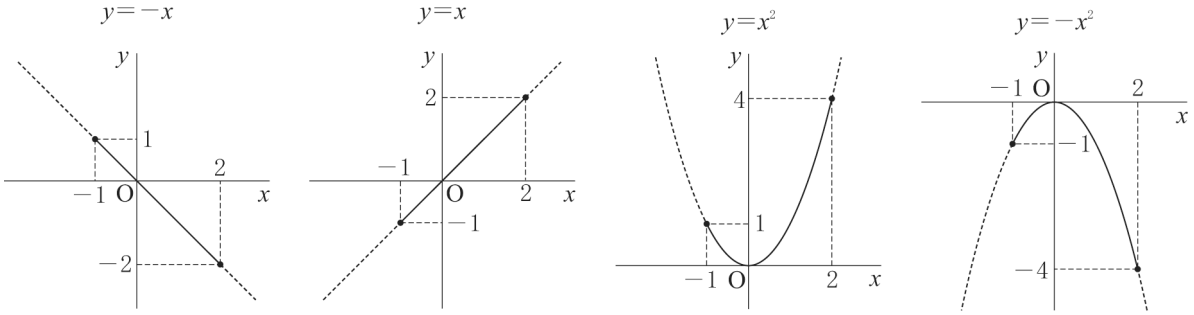
よって，$-16=-\dfrac{1}{4}a^2$　　$a^2=64$　　$a>-6$ より，$a=8$

また，グラフより，y の最大値は 0 だから，$b=0$

図１



ポイント》変域の問題はグラフで考えよう！



$-2\leqq y\leqq 1$　　$-1\leqq y\leqq 2$　　$0\leqq y\leqq 4$　　$-4\leqq y\leqq 0$

特に，関数 $y=ax^2$ の変域を求めるときに注意しよう。

問５　有理数 x は，整数 m と，0 でない整数 n を使って，$x=\dfrac{m}{n}$ と表せる。

$\dfrac{35}{12}x=\dfrac{35}{12}\times\dfrac{m}{n}$ が自然数となるのは，m が 12 の倍数，n が 35 の約数のときであり，$\dfrac{21}{20}x=\dfrac{21}{20}\times\dfrac{m}{n}$ が自然数となるのは，m が 20 の倍数，n が 21 の約数のときである。

よって，m は 12 と 20 の公倍数であり，n は 35 と 21 の公約数である。

ここで，m が小さく，n が大きいほど，$x=\dfrac{m}{n}$ は小さくなるので，$m=60$，$n=7$ のときの $x=\dfrac{60}{7}$ が求める有理数である。

問６　取り出した 2 枚のカードに書いてある数の組み合わせの総数は，**図２**の樹形図より 9 通りである。なお，それぞれの場合における a，b，c の値も樹形図に示してある。全 9 通りのうち，$a<c<b$ であるのは，○印の 5 通りだから，求める確率は，$\frac{5}{9}$ である。

図２

		a	b	c	
1	4	8	14	5	
	6	8	12	7	
	8	8	10	9	○
3	4	6	14	7	○
	6	6	12	9	○
	8	6	10	11	
5	4	4	14	9	○
	6	4	12	11	○
	8	4	10	13	

ポイント》確率の求め方

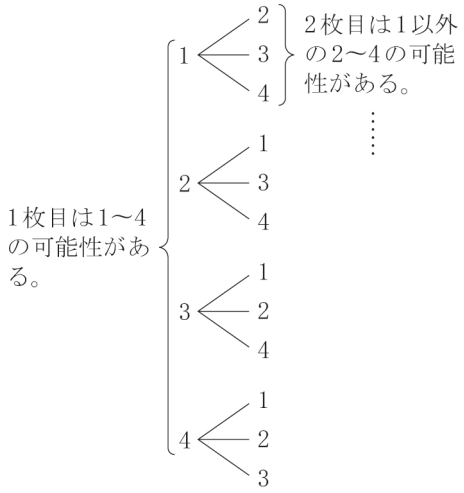
①　問題文中における，「～とき」の箇所がその問いで「行うこと」を表し，その場合の数が，確率の公式における分母となる。

②　問題文中における，「～確率」の箇所がその問いで「起こること」を表し，その場合の数が，確率の公式における分子となる。

③　さいころを 2 つ投げる場合は表を，その他の場合は樹形図を使うのが基本。

④　樹形図は「起こりうる可能性」を縦に並べてかいていく。

例：4 枚のカード 1, 2, 3, 4 から 2 枚を選んで並べるときの並べ方を表す樹形図



問７　a の百の位の数，十の位の数，一の位の数を，それぞれ x，y，z とすると，$a=100x+10y+z$，$b=100y+10x+z$ と表せる。

$$\sqrt{\frac{a-b}{2}}=\sqrt{\frac{(100x+10y+z)-(100y+10x+z)}{2}}=\sqrt{\frac{90x-90y}{2}}=\sqrt{45(x-y)}=3\sqrt{5(x-y)}$$

よって，x，y はともに 1 以上 9 以下の自然数だから，$x-y$ は -8 以上 8 以下の整数なので，$\sqrt{\frac{a-b}{2}}$ の値が自然数となるのは，$x-y=5$ のときだけである。したがって，$(x,\ y)=(6,\ 1),\ (7,\ 2),\ (8,\ 3),\ (9,\ 4)$ である。

また，$x+y+z=20$ より，$(x,\ y,\ z)=(6,\ 1,\ 13),\ (7,\ 2,\ 11),\ (8,\ 3,\ 9),\ (9,\ 4,\ 7)$ であるが，z は 0 以上 9 以下の自然数なので，適しているのは，$(x,\ y,\ z)=(8,\ 3,\ 9),\ (9,\ 4,\ 7)$ である。

よって，$a=839,\ 947$

数-24-公-大阪(C)-KS-02

2　【平面図形】

問１　(1) 線分 BC は円 O の直径だから，半径は，$\frac{1}{2}$BC$=2$(cm) である。よって，おうぎ形 ODC の面積は，$\pi\times2^2\times\frac{a}{360}=\frac{1}{90}\pi a$(cm^2)

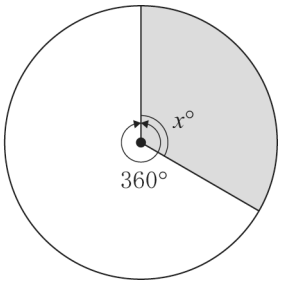
ポイント》おうぎ形のまとめ

「おうぎ形は円の一部分である」ということがポイント！

(おうぎ形の面積)＝(円の面積) × $\frac{x}{360}$

(おうぎ形の弧の長さ)＝(円周) × $\frac{x}{360}$

←「一部分」……「1周360°のうち，何度分か」を表す割合！



問2　(1) BE＝1cm より，CE＝BC－BE＝4－1＝3(cm)

問1 (2) より，△BDO∽△AEC で，△BDO は OB＝OD の二等辺三角形だから，△AEC は CA＝CE＝3cm の二等辺三角形である。

また，線分 BC は円 O の直径だから，∠BAC＝90°なので，△ABC で三平方の定理より，

$AB^2=BC^2-CA^2=4^2-3^2=7$　　AB＞0 より，AB＝$\sqrt{7}$ (cm)

(2) **問1** (2) の証明の㋔より，∠BOD＝∠ACE

対頂角は等しいから，∠BOD＝∠FOC

よって，∠FOC＝∠ACE だから，2 つの角が等しいので，

△FOC は FO＝FC の二等辺三角形である。

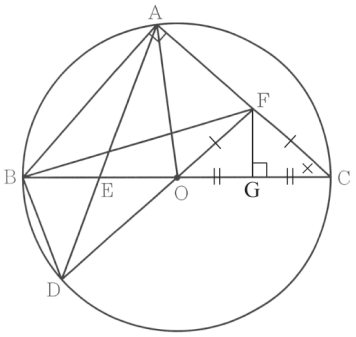
したがって，**図1**のように，頂点 F から底辺 OC に垂線 FG をおろすと，OG＝GC＝1cm である。

また，△ABC と△GFC で，∠BAC＝∠FGC＝90°，

∠ACB＝∠GCF より，2 組の角がそれぞれ等しいから，

△ABC∽△GFC

図1



よって，AB : GF＝AC : GC　　$\sqrt{7}$: GF＝3 : 1　　GF＝$\frac{\sqrt{7}}{3}$ (cm)

したがって，△FBG で三平方の定理より，$BF^2=BG^2+FG^2=(2+1)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2=\frac{88}{9}$

BF＞0 より，BF＝$\frac{2\sqrt{22}}{3}$ (cm)

数-24-公-大阪(C)-KS-03

3　【空間図形】

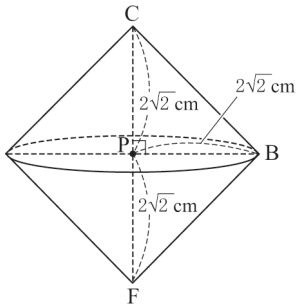
問1　(1) 四角形 GFBC は正方形だから，△BCF は直角二等辺三角形である。よって，頂点 B から底辺 CF に垂線 BP をおろすと，△PBC と△PBF も，ともに直角二等辺三角形だから，

BP＝$\frac{BC}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ (cm)

したがって，回転体は**図1**のような，底面が半径 $2\sqrt{2}$ cm の円で，高さが $2\sqrt{2}$ cm の円錐が，2 つ組み合わさった立体である。よって，

その体積は，$\pi\times(2\sqrt{2})^2\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{3}\times2=\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm^3)

図1



(2) 線分 ED をひくと，△DEA で三平方の定理より，$ED^2=EA^2+AD^2=4^2+2^2=20$

△ECD で三平方の定理より，$EC^2=ED^2+CD^2=20+4^2=36$　　EC＞0 より，EC＝6(cm)

(3) EI＝JK＝$x$cm とおくと，IC＝EC－EI＝6－x(cm)である。

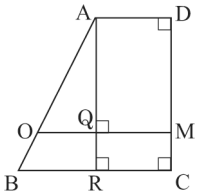
よって，IJ // EF より，平行線と線分の比の性質から，CJ : CF＝IC : EC＝(6－x) : 6

また，JK // FB より，平行線と線分の比の性質から，CJ : CF＝JK : FB

(6－x) : 6＝x : 4　　この比例式を解くと，x＝$\frac{12}{5}$

問２　(1) **図２**のように，台形 ABCD の頂点 A から辺 BC に垂線をひき，線分 OM，辺 BC との交点を，それぞれ Q，R とする。

図２



四角形 AQMD と四角形 ARCD はともに長方形だから，AD＝QM＝RC＝2 cm より，BR＝BC－RC＝4－2＝2(cm)

また，AQ＝DM＝DC－MC＝4－1＝3(cm)，AR＝DC＝4 cm

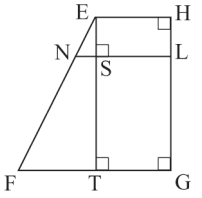
よって，OQ // BR より，平行線と線分の比の性質から，

OQ : BR＝AQ : AR＝3 : 4　　したがって，$OQ=\frac{3}{4}BR=\frac{3}{4}\times2=\frac{3}{2}$ (cm) だから，

$OM=OQ+QM=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$ (cm)

(2) まずは，(1) と同様に，NL の長さを求める。**図３**のように，台形 EFGH の頂点 E から辺 FG に垂線をひき，線分 NL，辺 FG との交点を，それぞれ S，T とする。SL＝2 cm，NS : FT＝ES : ET＝1 : 4 より，$NS=\frac{1}{4}FT=\frac{1}{2}$ (cm)

図３

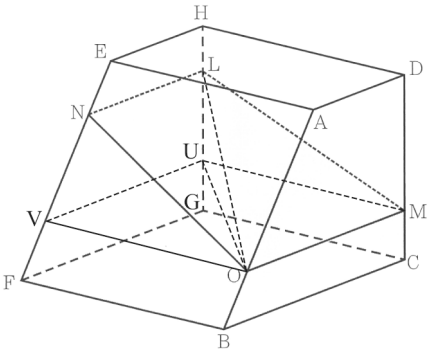


だから，$NL=NS+SL=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ (cm)

次に，**図４**のように，面 UVOM // 面 GFBC となるように，辺 HG 上に U，辺 EF 上に V をとると，四角形 UVOM は長方形となる。

また，立体 OBCM－NFGL は，四角柱 OBCM－VFGU，四角錐 O－NVUL，三角錐 L－UOM の 3 つの立体に切り分けることができる。

図４



四角柱 OBCM－VFGU の体積は，$(OM+BC)\times MC\times\frac{1}{2}\times FB=\left(\frac{7}{2}+4\right)\times1\times\frac{1}{2}\times4=15(cm^3)$　…①

UG＝MC＝1 cm より，LU＝HG－HL－UG＝4－1－1＝2(cm)だから，四角錐 O－NVUL の体積は，

$(NL+VU)\times LU\times\frac{1}{2}\times VO\times\frac{1}{3}=\left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right)\times2\times\frac{1}{2}\times4\times\frac{1}{3}=8(cm^3)$　…②

三角錐 L－UOM の体積は，$OM\times UM\times\frac{1}{2}\times LU\times\frac{1}{3}=\frac{7}{2}\times4\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{3}=\frac{14}{3}(cm^3)$　…③

よって，①＋②＋③より，$15+8+\frac{14}{3}=\frac{83}{3}(cm^3)$