Ｒ２　栃木県　公立　数学　問題

数-20-公-栃木-問-01

1　次の問１から問 14 に答えなさい。

問１　$(-18)\div 2$ を計算しなさい。

問２　$4(x+y)-3(2x-y)$ を計算しなさい。

問３　$\frac{1}{6}a^2\times(-4ab^2)$ を計算しなさい。

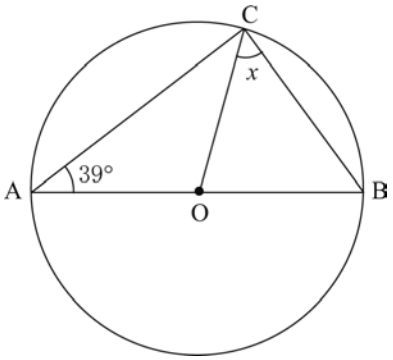
問４　$5\sqrt{6}\times\sqrt{3}$ を計算しなさい。

問５　$(x+8)(x-8)$ を展開しなさい。

問６　x についての方程式 $2x-a=-x+5$ の解が 7 であるとき，a の値を求めなさい。

問７　100 個のいちごを 6 人に x 個ずつ配ったところ，y 個余った。この数量の関係を等式で表しなさい。

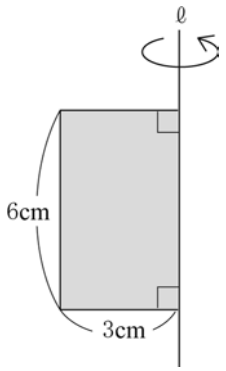
問８　右の図において，点 A，B，C は円 O の周上の点であり，AB は円 O の直径である。$\angle x$ の大きさを求めなさい。



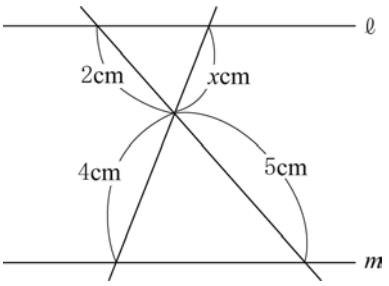
問９　2 次方程式 $x^2-9x=0$ を解きなさい。

問 10　袋の中に赤玉が 9 個，白玉が 2 個，青玉が 3 個入っている。この袋の中の玉をよくかき混ぜてから 1 個取り出すとき，白玉が出ない確率を求めなさい。ただし，どの玉を取り出すことも同様に確からしいものとする。

問 11　右の図の長方形を，直線ℓを軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし，円周率はπとする。



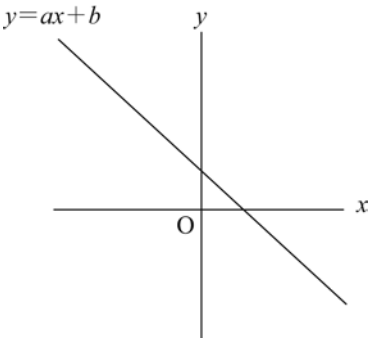
問 12　右の図のように，平行な 2 つの直線ℓ，m に 2 直線が交わっている。x の値を求めなさい。



問 13　右の図は，1 次関数 $y=ax+b$ (a，b は定数) のグラフである。このときの a，b の正負について表した式の組み合わせとして正しいものを，次の**ア**，**イ**，**ウ**，**エ**のうちから 1 つ選んで，記号で答えなさい。

ア　$a>0$，$b>0$　　**イ**　$a>0$，$b<0$

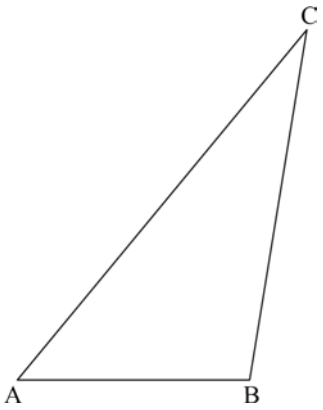
ウ　$a<0$，$b>0$　　**エ**　$a<0$，$b<0$



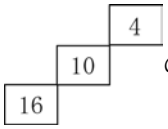
問 14　ある工場で作られた製品の中から，100 個の製品を無作為に抽出して調べたところ，その中の 2 個が不良品であった。この工場で作られた 4500 個の製品の中には，何個の不良品がふくまれていると推定できるか，およその個数を求めなさい。

2 次の問１，問２，問３に答えなさい。

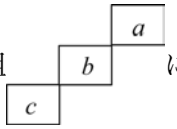
問１ 右の図のような∠A＝50°，∠B＝100°，∠C＝30°の△ABCがある。この三角形を点Aを中心として時計回りに25°回転させる。この回転により点Cが移動した点をPとするとき，点Pを作図によって求めなさい。ただし，作図には定規とコンパスを使い，また，作図に用いた線は消さないこと。



問２ 右の図は，2020年2月のカレンダーである。この中の



のような3つの自然数の組



において，b^2-ac はつねに同じ値となる。

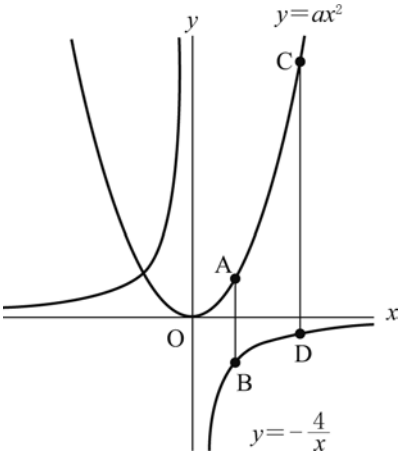
次の［　　］内の文は，このことを証明したものである。文中の［①］，［②］，［③］に当てはまる数をそれぞれ答えなさい。

2020年
2月

日	月	火	水	木	金	土
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29

b，c をそれぞれ a を用いて表すと，
$b=a+$［①］，$c=a+$［②］だから，
$b^2-ac=(a+$［①］$)^2-a(a+$［②］$)$
$=$［③］
したがって，b^2-ac はつねに同じ値［③］となる。

問３ 右の図は，2つの関数 $y=ax^2(a>0)$，$y=-\dfrac{4}{x}$ のグラフである。それぞれのグラフ上の，x 座標が1である点をA，Bとし，x 座標が4である点をC，Dとする。AB：CD＝1：7となるとき，a の値を求めなさい。



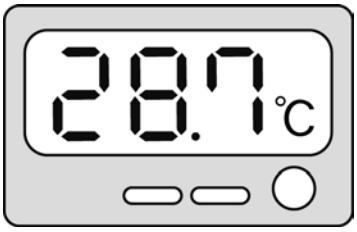
3 次の**問１**，**問２**に答えなさい。

問１　ある市には A 中学校と B 中学校の 2 つの中学校があり，昨年度の生徒数は 2 つの中学校を合わせると 1225 人であった。今年度の生徒数は昨年度に比べ，A 中学校で 4%増え，B 中学校で 2%減り，2 つの中学校を合わせると 4 人増えた。このとき，A 中学校の昨年度の生徒数を x 人，B 中学校の昨年度の生徒数を y 人として連立方程式をつくり，昨年度の 2 つの中学校のそれぞれの生徒数を求めなさい。ただし，途中の計算も書くこと。

問２　あさひさんとひなたさんの姉妹は，8 月の 31 日間，毎日同じ時間に同じ場所で気温を測定した。測定には，右の**図**のような小数第 2 位を四捨五入した近似値が表示される温度計を用いた。2 人で測定した記録を，あさひさんは**表１**のように階級の幅を 5℃として，ひなたさんは**表２**のように階級の幅を 2℃として，度数分布表に整理した。

このとき，次の(1)，(2)，(3)の問いに答えなさい。

図



(1) ある日，気温を測定したところ，温度計には 28.7℃と表示された。このときの真の値を a℃とすると，a の値の範囲を不等号を用いて表しなさい。

(2) **表１**の度数分布表における，最頻値を求めなさい。

(3) **表１**と**表２**から，2 人で測定した記録のうち，35.0℃以上 36.0℃未満の日数が 1 日であったことがわかる。そのように判断できる理由を説明しなさい。

表１

階級(℃)			度数(日)
以上		未満	
20.0	～	25.0	1
25.0	～	30.0	9
30.0	～	35.0	20
35.0	～	40.0	1
計			31

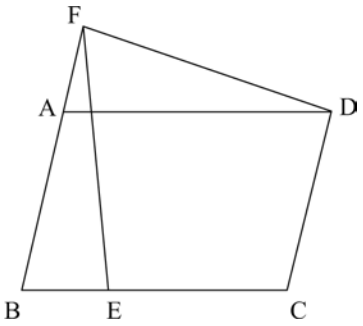
表２

階級(℃)			度数(日)
以上		未満	
24.0	～	26.0	1
26.0	～	28.0	3
28.0	～	30.0	6
30.0	～	32.0	11
32.0	～	34.0	9
34.0	～	36.0	1
計			31

4 次の問１，問２に答えなさい。

問１　右の図のような，AB＜AD の平行四辺形 ABCD があり，辺 BC 上に AB＝CE となるように点 E をとり，辺 BA の延長に BC＝BF となるように点 F をとる。ただし，AF＜BF とする。

このとき，△ADF≡△BFE となることを証明しなさい。

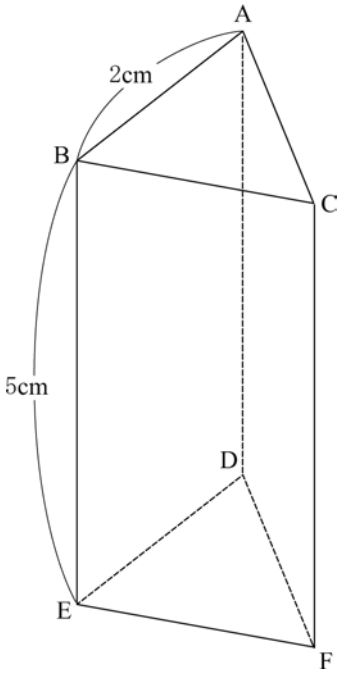


問２　右の図は，1 辺が 2 cm の正三角形を底面とする高さ 5 cm の正三角柱 ABC－DEF である。

(1) 正三角形 ABC の面積を求めなさい。

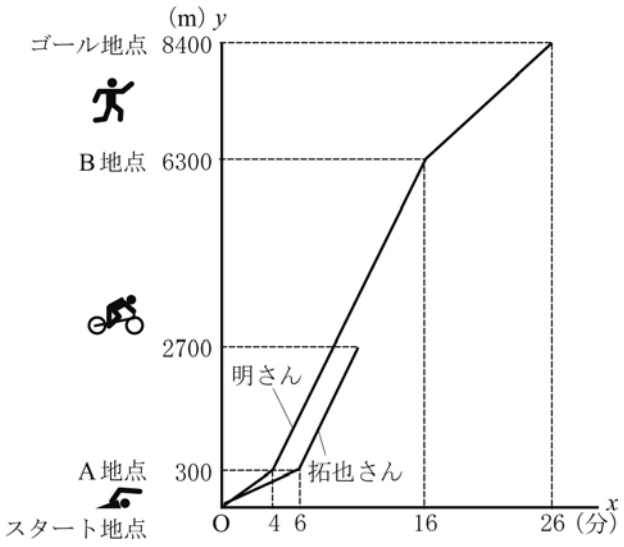
(2) 辺 BE 上に BG＝2 cm となる点 G をとる。また，辺 CF 上に FH＝2 cm となる点 H をとる。

このとき，△AGH の面積を求めなさい。



5 明さんと拓也さんは，スタート地点からA地点までの水泳300 m，A地点からB地点までの自転車6000 m，B地点からゴール地点までの長距離走2100 mで行うトライアスロンの大会に参加した。

右の図は，明さんと拓也さんが同時にスタートしてからx分後の，スタート地点からの道のりをy mとし，明さんは，水泳，自転車，長距離走のすべての区間を，拓也さんは，水泳の区間と自転車の一部の区間を，それぞれグラフに表したものである。ただし，グラフで表した各区間の速さは一定とし，A地点，B地点における各種目の切り替えに要する時間は考えないものとする。



次の［　　］内は，大会後の明さんと拓也さんの会話である。

明	「今回の大会では，水泳が4分，自転車が12分，長距離走が10分かかったよ。」
拓也	「僕はA地点の通過タイムが明さんより2分も遅れていたんだね。」
明	「次の種目の自転車はどうだったの。」
拓也	「自転車の区間のグラフを見ると，2人のグラフは平行だから，僕の自転車がパンクするまでは明さんと同じ速さで走っていたことがわかるね。パンクの修理後は，速度を上げて走ったけれど，明さんには追いつけなかったよ。」

このとき，次の**問1**，**問2**，**問3**，**問4**に答えなさい。

問1　水泳の区間において，明さんが泳いだ速さは拓也さんが泳いだ速さの何倍か。

問2　スタートしてから6分後における，明さんの道のりと拓也さんの道のりとの差は何mか。

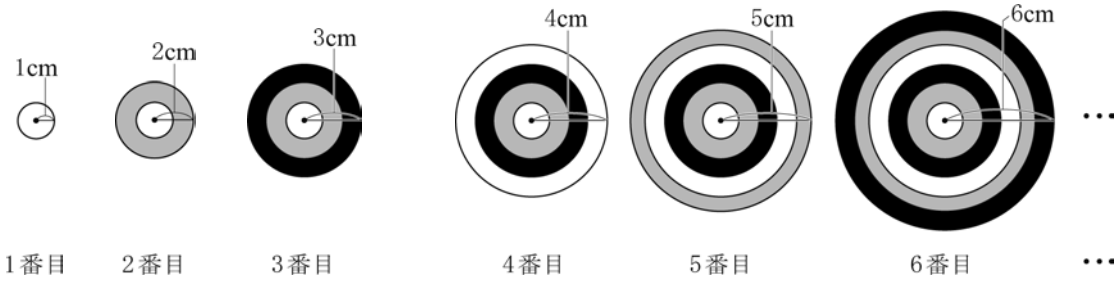
問3　明さんの長距離走の区間における，xとyの関係を式で表しなさい。ただし，途中の計算も書くこと。

問4　［　　］内の下線部について，拓也さんは，スタート地点から2700 mの地点で自転車がパンクした。その場ですぐにパンクの修理を開始し，終了後，残りの自転車の区間を毎分600 mの速さでB地点まで走った。さらに，B地点からゴール地点までの長距離走は10分かかり，明さんより3分遅くゴール地点に到着した。

このとき，拓也さんがパンクの修理にかかった時間は何分何秒か。

6 **図１**のように，半径 1 cm の円を白色で塗り，1 番目の図形とする。また，**図２**のように，1 番目の図形に中心が等しい半径 2 cm の円をかき加え，半径 1 cm の円と半径 2 cm の円に囲まれた部分を灰色で塗り，これを 2 番目の図形とする。さらに，**図３**のように，2 番目の図形に中心が等しい半径 3 cm の円をかき加え，半径 2 cm の円と半径 3 cm の円に囲まれた部分を黒色で塗り，これを 3 番目の図形とする。同様の操作を繰り返し，白色，灰色，黒色の順に色を塗り，できた図形を**図４**のように，4 番目の図形，5 番目の図形，6 番目の図形，…とする。

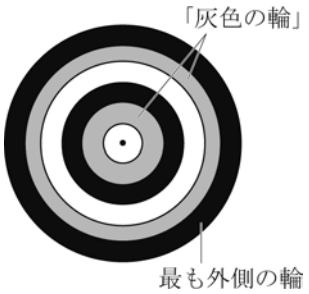
図１　**図２**　**図３**　**図４**



また，それぞれの色で塗られた部分を「白色の輪」,「灰色の輪」,「黒色の輪」とする。例えば，**図５**は 6 番目の図形で，「灰色の輪」が 2 個あり，最も外側の輪は「黒色の輪」である。

このとき，次の**問１**，**問２**，**問３**，**問４**に答えなさい。ただし，円周率はπとする。

図５



問１　「灰色の輪」が初めて 4 個できるのは，何番目の図形か。

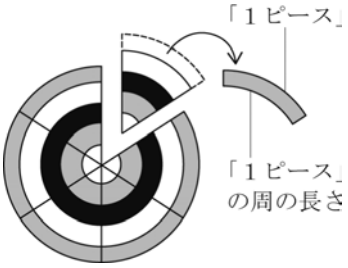
問２　20 番目の図形において，「黒色の輪」は何個あるか。

問３　n 番目 (n は 2 以上の整数) の図形において，最も外側の輪の面積が $77\pi\,\mathrm{cm}^2$ であるとき，n の値を求めなさい。ただし，途中の計算も書くこと。

問４　n 番目の図形をおうぎ形に m 等分する。このうちの 1 つのおうぎ形を取り出し，最も外側の輪であった部分を切り取り，これを「1 ピース」とする。例えば，$n=5$，$m=6$ の「1 ピース」は**図６**のようになり，太線 (——) でかかれた 2 本の曲線と 2 本の線分の長さの合計を「1 ピース」の周の長さとする。

このとき，次の文の①，②に当てはまる式や数を求めなさい。ただし，文中の a，b は 2 以上の整数とする。

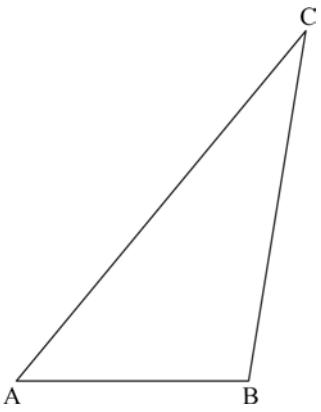
図６

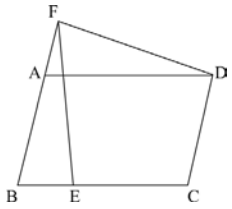


$n=a$，$m=5$ の「1 ピース」の周の長さと，$n=b$，$m=9$ の「1 ピース」の周の長さが等しいとき，b を a の式で表すと，(　①　) となる。①を満たす a，b のうち，それぞれの「1 ピース」が同じ色のとき，b の値が最小となる a の値は，(　②　) である。

Ｒ２　栃木県　公立　数学　解答用紙

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-栃木-KY-01	1	問１			
		問２			
		問３			
		問４			
		問５			
		問６	$a=$		
		問７			
		問８	度		
		問９	$x=$		
		問 10			
		問 11	cm^3		
		問 12	$x=$		
		問 13			
		問 14	およそ　　個		

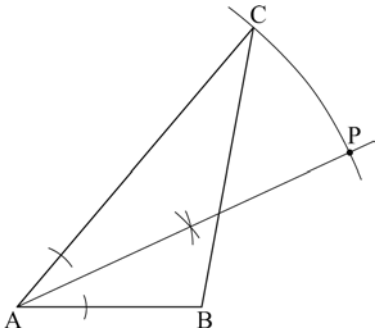
	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-栃木-KY-02	2	問１			
		問２	①　　(　　) ②　　(　　) ③　　(　　)		
		問３	a＝		
数-20-公-栃木-KY-03	3	問１	答え（A 中学校　　人，B 中学校　　人）		
		問２ (1)			
		問２ (2)	℃		
		問２ (3)			

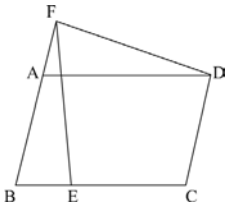
	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-栃木-KY-04	4	問１	〔証明〕  		
		問２	(1)　　cm^2		
			(2)　　cm^2		
数-20-公-栃木-KY-05	5	問１	倍		
		問２	m		
		問３	答え（　　）		
		問４	分　　秒		

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数−20−公−栃木−KY−06	6	問１	番目		
		問２	個		
		問３	答え（n＝　　）		
		問４	①　(b＝　　)　②　(a＝　　)		

数学　解答

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-栃木-K-01	1	問１	-9	2	
		問２	$-2x+7y$	2	
		問３	$-\frac{2}{3}a^3b^2$	2	
		問４	$15\sqrt{2}$	2	
		問５	x^2-64	2	
		問６	$(a=)16$	2	
		問７	$100-6x=y$	2	
		問８	51　(度)	2	
		問９	$(x=)0$，9	2	
		問 10	$\frac{6}{7}$	2	
		問 11	54π　(cm^3)	2	
		問 12	$(x=)\frac{8}{5}$	2	
		問 13	ウ	2	
		問 14	(およそ)　90　(個)	2	

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-栃木-k-02	2	問１	(例)  	4	
		問２	①　　(　6　) ②　　(　12　) ③　　(　36　)	3	
		問３	(a＝)3	4	
数-20-公-栃木-k-03	3	問１	(例) $\begin{cases} x+y=1225 & \cdots\cdots① \\ \frac{4}{100}x-\frac{2}{100}y=4 & \cdots\cdots② \end{cases}$ ②より　$4x-2y=400$ から　$2x-y=200$　……③ ①＋③より　$3x=1425$ よって　$x=475$ ①に代入して　$475+y=1225$ したがって　$y=750$ この解は問題に適している。 答え（　A 中学校　475 人，B 中学校　750 人　）	6	
		問２ (1)	$28.65 \leqq a < 28.75$	2	
		問２ (2)	32.5　(℃)	2	
		問２ (3)	(例) **表１**において 35.0℃以上 40.0℃未満の日が 1 日あり，**表２**において 36.0℃以上の日がないから。	3	

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-栃木-オ-04	4	問１	 〔証明〕 (例) △ADF と△BFE において 四角形 ABCD は平行四辺形なので AD // BC より，同位角は等しいから ∠DAF＝∠FBE　……① 仮定より　AB＝CE　……② BF＝BC　……③ ここで　AF＝BF－AB　……④ BE＝BC－CE　……⑤ ②，③，④，⑤より　AF＝BE……⑥ 平行四辺形の対辺は等しいから AD＝BC　……⑦ ③，⑦より　AD＝BF　……⑧ ①，⑥，⑧より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから △ADF≡△BFE	7	
		問２ (1)	$\sqrt{3}$　(cm^2)	3	
		問２ (2)	$\sqrt{10}$　(cm^2)	4	
数-20-公-栃木-オ-05	5	問１	1.5　(倍)	3	
		問２	1000　(m)	3	
		問３	(例) 明さんの長距離走の区間のグラフの傾きは $\frac{8400-6300}{26-16}=210$ であるから，x と y の関係の式は $y=210x+b$ と表される。 グラフは点 (16，6300) を通るから $6300=210\times16+b$ よって　$b=2940$ したがって，求める式は $y=210x+2940$ 答え（　$y=210x+2940$　）	6	
		問４	2　(分)　12　(秒)	5	

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-栃木-K-06		問１	11　(番目)	2	
		問２	6　(個)	3	
	6	問３	(例) 最も外側にある輪の面積は $\pi n^2-\pi(n-1)^2=\pi(2n-1)$ これが $77\pi\,\mathrm{cm}^2$ になるから $\pi(2n-1)=77\pi$ $2n=78$ よって　$n=39$ この解は問題に適している。 答え（　$n=39$　）	6	
		問４	①　（　$(b=)\dfrac{9a-2}{5}$　）　　②　（　$(a=)8$　）	6	

Ｒ２　栃木県　公立　数学　解説

数-20-公-栃木-KS-01

1　【小問集合】

〈栃木県〉

① **問１** 正負の数の計算，**問２・３** 式の計算，**問４** 根号を含む式の計算，**問５** 式の展開，**問６** 方程式の利用，**問７** 数量の関係を表す式，**問８** 円周角の定理，**問９** 2 次方程式，**問 10** 確率，**問 11** 回転体の体積，**問 12** 平行線と線分の比，**問 13** 1 次関数，**問 14** 標本調査

② 幅広い単元から出題されているが，どれも基礎レベルなのでミスをしないように基礎問題の練習を繰り返しておこう。

問 13 図より，グラフは右下がりの直線なので，傾き a は負である。

また，y 軸との交点は x 軸よりも上方にあるので，切片 b は正である。

よって，$a<0$, $b>0$ となっている**ウ**が正解。

ポイント》関数は「式」と「定数が何を表すか」を一緒に覚えておこう！

・1 次関数　→　式は $y=ax+b$，定数 a は「変化の割合」または「傾き」，定数 b は「切片」をそれぞれ表す。

傾きが正のときは右上がり，負のときは右下がりのグラフとなる。

切片は y 軸との交点の y 座標のこと。

問 14 無作為に抽出した 100 個の製品のうち，不良品が 2 個ふくまれていたことから，全 4500 個の製品のうちにふくまれる不良品の個数を x 個とすると，全体の個数に対してふくまれる不良品の個数の割合がおよそ同じであると考えることができるので，

$\frac{x}{4500}=\frac{2}{100}$　⇒　$x=90$　よって，不良品の個数はおよそ 90 個。

ポイント》標本調査の考え方の基本は「割合」。

→「合計○個中の□個分」を $\frac{\square}{\bigcirc}$ という割合で考えるとわかりやすい。

数-20-公-栃木-KS-02

2　【作図・式の計算の利用・関数のグラフと図形】

問２　図のカレンダーより，b の日付は a の日付の 6 日後であり，c の日付は a の日付の 12 日後であることがわかる。

このことから，b，c をそれぞれ a を用いて表すと，$b=a+6$，$c=a+12$ だから，

$b^2-ac=(a+6)^2-a(a+12)=36$　したがって，b^2-ac はつねに同じ値 36 となる。

ポイント》式の証明は，具体例から法則を見つけ出そう！

たとえば，今回の場合は問題文に $a=4$，$b=10$，$c=16$ が具体例として示されている。

すると，b，c がそれぞれ a に対してどのような関係になっているかの法則が見えてくる。

数-20-公-栃木-KS-03

3　【連立方程式の利用・資料の整理】

問２　(1) 小数第 2 位を四捨五入した結果が 28.7℃となる下限は 28.65℃である。

次に，28.75℃以上であれば，小数第 2 位を四捨五入した結果が 28.8℃以上となるので，28.75℃未満でなければならない。

よって，このときの真の値 a の範囲は，$28.65\leqq a<28.75$

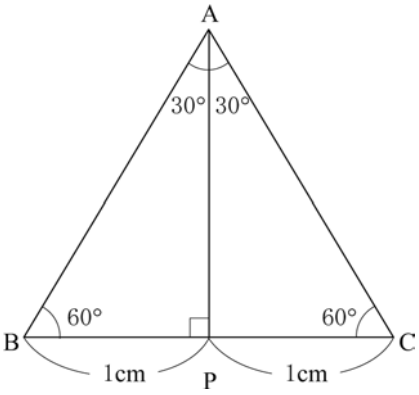
ポイント》不等号の種類（＜，≦）に注意！

「四捨五入」の言葉のとおりに考えると，上限は 28.74℃のように思ってしまうが，28.74 と 28.75 の間には無数に数が存在している（たとえば 28.749 や 28.7499 など）。28.75 よりも小さいことを表すには，イコールのつかない「＜」を使おう！

4 【平面図形・空間図形】

問２ (1) 正三角形 ABC を取り出して考える。

頂点 A から底辺 BC に対して垂線をおろし，その交点を P とする。



すると△ABP は∠BAP＝$\frac{1}{2}$∠BAC＝30 °,∠ABP＝60 °,

∠APB＝90 °の直角三角形となる。

また，BP＝$\frac{1}{2}$BC＝1(cm)であるから，

BP：AP＝1：$\sqrt{3}$⇒　1：AP＝1：$\sqrt{3}$

⇒　AP＝$\sqrt{3}$(cm)　よって，

△ABC＝$\frac{1}{2}$×2×$\sqrt{3}$＝$\sqrt{3}$(cm^2)

(2) 直角三角形 ABG において三平方の定理により，

AG^2＝AB^2＋BG^2＝2^2＋2^2＝8

⇒　AG＞0 より AG＝2$\sqrt{2}$(cm)

直角三角形 ACH において三平方の定理により，

AH^2＝AC^2＋CH^2＝2^2＋3^2＝13

⇒　AH＞0 より AH＝$\sqrt{13}$(cm)

H から辺 BE に垂線をおろし，その交点を I とする。

四角形 IEFH は長方形となるので，GI＝1(cm)，IH＝EF＝2(cm)

直角三角形 GIH において三平方の定理により，

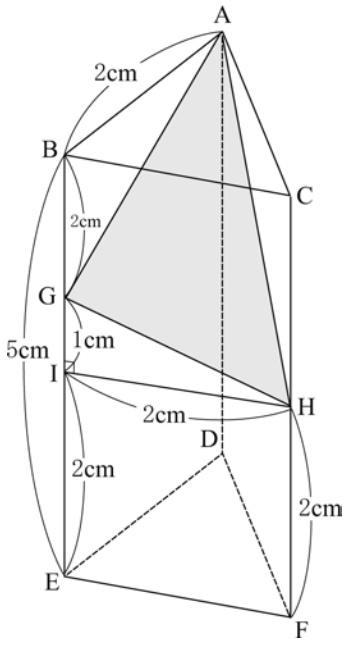
GH^2＝GI^2＋IH^2＝1^2＋2^2＝5

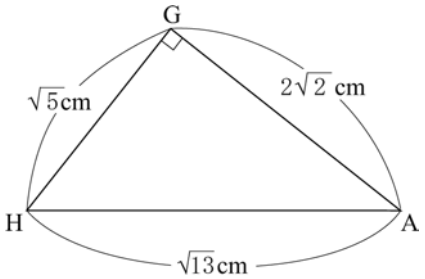
⇒　GH＞0 より GH＝$\sqrt{5}$(cm)

ここで($\sqrt{13}$)^2＝(2$\sqrt{2}$)^2＋($\sqrt{5}$)^2 となるので，

△AGH は∠AGH＝90 °の直角三角形。

よって，△AGH＝$\frac{1}{2}$×2$\sqrt{2}$×$\sqrt{5}$＝$\sqrt{10}$(cm^2)





ポイント》空間図形の問題は，平面図形として取り出して考える！

数-20-公-栃木-KS-05

5 【関数の利用】

問２　スタートしてから 6 分後の拓也さんの道のりはグラフから 300m であることがわかるので，明さんの道のりを求めよう。

6 分後の時点で明さんは自転車に乗っており，その区間のスタートしてからの時間とスタート地点からの道のりを表すグラフは直線なので，$y=ax+b$ と表せる。

グラフより，$(x,\ y)=(4,300)$，$(16,\ 6300)$をそれぞれ代入すると，

連立方程式 $\begin{cases}300=4a+b\\6300=16a+b\end{cases}$ が立てられる。これを解くと，$(a,\ b)=(500,\ -1700)$なので，

グラフの式は $y=500x-1700$ $(4\leqq x\leqq 16)$である。

よって，6 分後の明さんの道のりは，$y=500\times 6-1700=1300$(m)

したがって，明さんの道のりと拓也さんの道のりとの差は $1300-300=1000$(m)

ポイント》グラフから直線の式を求めるときは，グラフが通る 2 点の座標を $y=ax+b$ に代入し，連立方程式をつくる！

→**問３**においても同じやり方で解くことができる。

問４　□内の拓也さんの発言「自転車の区間のグラフを見ると，2 人のグラフは平行だから，僕の自転車がパンクするまでは明さんと同じ速さで走っていたことがわかるね」から，スタート地点から 2700m の地点に拓也さんが到着したのは，明さんが同じ 2700m の地点に到着した時間の 2 分後であることがわかる。まずは明さんが 2700m の地点に到着した時間を求めよう。

問２より，明さんの自転車区間におけるスタートしてからの時間とスタート地点からの道のりを表す関数の式は $y=500x-1700$ $(4\leqq x\leqq 16)$なので，$y=2700$ を代入すると

$2700=500x-1700 \quad \Rightarrow \quad x=8\frac{4}{5}$(分後)

つまり，明さんが 2700m の地点に到着したのは，$8\frac{4}{5}$分後である。

よって，拓也さんが 2700m の地点に到着したのは，$8\frac{4}{5}+2=10\frac{4}{5}$(分後)

すなわち，$\frac{4}{5}\times 60=48$ なので，10 分 48 秒後であることがわかった。

次に拓也さんがゴールに到着したのは明さんの 3 分後なので, 明さんのグラフより, $26+3=29$(分後)

また，B 地点からゴールまで 10 分かかったので，B 地点に到着したのは，$29-10=19$(分後)

さらに，パンクの修理が終了した後，残りの自転車の区間 $6300-2700=3600$(m)を毎分 600m の速さで B 地点まで走ったので，かかった時間は，$3600\div 600=6$(分)

よって，パンクの修理が終了して再度走り始めたのは，$19-6=13$(分後)なので，パンクの修理にかかった時間は，スタートしてから 10 分 48 秒後から 13 分後までの，2 分 12 秒である。

ポイント》文章から正しく情報を読み取り，冷静に対応していこう！

一般的な関数の利用についての問題を解いているだけでは，この問題を解くのに必要な論理的思考力は養えない。文章量・情報量の多い問題を数多く解き，解答に必要な情報を読み取れるよう，計算力だけでなく読解力も鍛えていこう。

数-20-公-栃木-KS-06

6 【規則性】

問１　新たに白色が塗られるのは，1 番目，4 番目，7 番目，…

新たに灰色が塗られるのは，2 番目，5 番目，8 番目，…

新たに黒色が塗られるのは，3 番目，6 番目，9 番目，…

というように，白色，灰色，黒色はそれぞれ(3 で割ると 1 余る整数)番目，(3 で割ると 2 余る整数)番目，(3 の倍数)番目で新たに塗られることがわかる。

ここで，黒色に着目すると，「黒色の輪」が初めて 4 個できるのは，$3\times 4=12$(番目)の図形である。

よって，「灰色の輪」が初めて 4 個できるのはその 1 つ前の時点なので，11 番目の図形である。

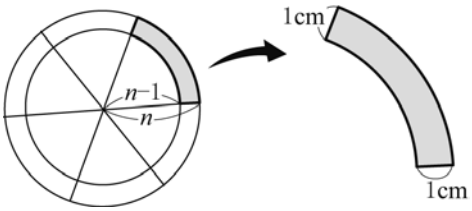
問２　**問１**より「黒色の輪」は(3 の倍数)番目で新たに塗られるので, 21 番目の図形においては 7 個の「黒色の輪」があるから，20 番目の図形において「黒色の輪」は 6 個ある。

問３　n 番目の図形における最も外側の輪は，半径 n cm の円から半径$(n-1)$cm の円を取り除いた図形なので,

$\pi n^2-\pi(n-1)^2=77\pi \quad \Rightarrow \quad n^2-(n-1)^2=77 \quad \Rightarrow \quad 2n-1=77 \quad \Rightarrow \quad n=39$

n は 2 以上の整数という条件にも適しているので，$n=39$

問４　n 番目の図形をおうぎ形に m 等分したときの「1 ピース」の周の長さについて一般的に考えてみよう。



考える周は,

(A)半径 n cm の円の円周の一部,

(B)半径$(n-1)$cm の円の円周の一部,

(C)「輪」から切り取った際の切り口にあたる線分 2 つ分の大きく 3 つの部分に分かれる。それぞれについて順番に求めてみよう。

(A)半径 n cm の円の円周の長さは，$2\pi n$ (cm)であり，その円を m 等分しているので,

その長さは $2\pi n\times\dfrac{1}{m}=\dfrac{2\pi n}{m}$(cm)である。

(B)半径$(n-1)$cmの円の円周の長さは，$2\pi(n-1)$ (cm)であり，その円を m 等分しているので,

その長さは $2\pi(n-1)\times\dfrac{1}{m}=\dfrac{2\pi(n-1)}{m}$(cm)である。

(C)切り口の長さは，最も大きい円とそれより 1 つ小さい円の半径の差なので 1cm。よって，2 つ分なので 2cm。

では次に，$n=a$，$m=5$ の場合について「1 ピース」の周の長さを求めよう。(A)～(C)から,

$\dfrac{2\pi n}{m}+\dfrac{2\pi(n-1)}{m}+2=\dfrac{2\pi a}{5}+\dfrac{2\pi(a-1)}{5}+2=\dfrac{4a-2}{5}\pi+2$(cm)

同様にして，$n=b$, $m=9$ の場合についても「1 ピース」の周の長さを求めると,

$\dfrac{2\pi n}{m}+\dfrac{2\pi(n-1)}{m}+2=\dfrac{2\pi b}{9}+\dfrac{2\pi(b-1)}{9}+2=\dfrac{4b-2}{9}\pi+2$(cm)

これらの長さが等しくなればよいので,

$\dfrac{4a-2}{5}\pi+2=\dfrac{4b-2}{9}\pi+2 \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{9a-2}{5}$ … ①

ここで**問１**より，白色，灰色，黒色はそれぞれ(3 で割ると 1 余る整数)番目，(3 で割ると 2 余る整数)番目，(3 の倍数)番目で新たに塗られることを利用すると,

a 番目の図形と b 番目の図形における「1 ピース」の色が同じになるためには，a と b がどちらも 3 で割ると 1 余る整数，または 3 で割ると 2 余る整数，または 3 の倍数である必要がある。

すなわち，a と b の差が 3 の倍数となればよい(**※注**)。

よって，$a-b=3k$(k は整数)とおくことができるので，$a=b+3k$ として①に代入すると,

$b=\dfrac{9(b+3k)-2}{5} \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{-27k+2}{4}$ となる。

b が 2 以上の整数であり，かつ最小となることに気をつけて整数 k の値を考えると,

$k=-2$ のときの $b=14$ が題意を満たすことがわかる。

$a=b+3k$ にそれぞれ代入すると，$a=14+3\times(-2)=8$

※注　「a と b がどちらも 3 で割ると 1 余る整数，または 3 で割ると 2 余る整数，または 3 の倍数であるとき，a と b の差は 3 の倍数となる」ことの証明

(ⅰ) a と b がどちらも 3 で割ると 1 余る整数である場合

a，b は整数 k，l を用いて，$a=3k+1$，$b=3l+1$ と表すことができる。

よって，a と b の差は，$a-b=(3k+1)-(3l+1)=3(k-l)$

(ⅱ) a と b がどちらも 3 で割ると 2 余る整数である場合

a，b は整数 k，l を用いて，$a=3k+2$，$b=3l+2$ と表すことができる。

よって，a と b の差は，$a-b=(3k+2)-(3l+2)=3(k-l)$

（iii）a と b がどちらも 3 の倍数である場合

a，b は整数 k，l を用いて，$a=3k$，$b=3l$ と表すことができる。

よって，a と b の差は，$a-b=3k-3l=3(k-l)$

ここで，$k-l$ は整数なので，$3(k-l)$ は 3 の倍数である。

したがって（ⅰ）～（iii）より，$a-b$ は 3 の倍数なので，a と b がどちらも 3 で割ると 1 余る整数，または 3 で割ると 2 余る整数，または 3 の倍数であるとき，a と b の差は 3 の倍数となる。(証明終)

ポイント》「余りによる分類」は規則性の問題の定番！

今回は白色，灰色，黒色の 3 色を順番に塗っていくことを繰り返すので，「3 で割ったときの余り」によってパターン分けすることができる。