H28　東京都　公立　数学　問題

数-16-公-東京-問-01

1　次の各問に答えよ。

問１　$-6-4^2\times\dfrac{1}{8}$　を計算せよ。

問２　$7a-b-5(a-2b)$　を計算せよ。

問３　$\sqrt{48}+\dfrac{9}{\sqrt{3}}$　を計算せよ。

問４　一次方程式　$x+6=2(x+1)$　を解け。

問５　連立方程式　$\begin{cases}9x-5y=-7\\-3x+2y=4\end{cases}$　を解け。

問６　二次方程式　$x^2+5x-6=0$　を解け。

問７　右の表は，マラソン大会の 10 km の部に出場した 50 人の記録を，度数分布表に整理したものである。

48 分の記録を含む階級の相対度数を求めよ。

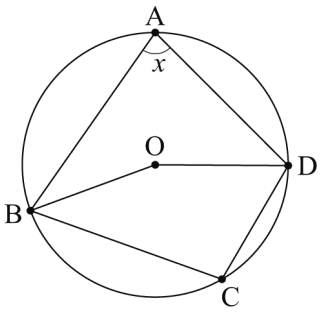
階 級（分）			度数（人）
以上		未満	
40	～	43	7
43	～	46	8
46	～	49	12
49	～	52	13
52	～	55	10
計			50

問８　右の**図１**のように，円Oの周上に 4 点 A，B，C，D がある。

点 A と点 B，点 A と点 D，点 B と点 C，点 C と点 D，点 O と点 B，点O と点 D をそれぞれ結ぶ。

∠OBC＝40°，∠ODC＝60°のとき，x で示した∠BAD の大きさは何度か。

図１

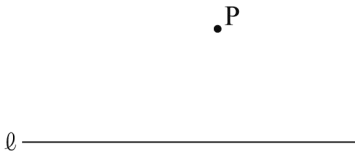


問９　右の**図２**で，点 P は直線 ℓ 上にない点である。

解答欄に示した図をもとにして，1 つの頂点が点 P に一致し，1 本の対角線が直線 ℓ に重なる正方形を，定規とコンパスを用いて作図せよ。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図２



数-16-公-東京-問-02

2　ある中学校で，S さんが作った問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

［S さんが作った問題］

右の**図１**は，「かけ算九九の表」の一部である。

図１において，かけられる数とかける数を除く 25 個の数の中から，縦と横がともに3マスの正方形の枠を用いて，1 マスに 1 個の数が入るように，9 個の数を囲むことを考える。

図１

かける数 / かけられる数	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

図２

かける数 / かけられる数	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

右の**図２**は，**図１**において，縦と横がともに 3 マスの正方形の枠を用いて，四すみのうち，左上の数が 2，右上の数が 4，左下の数が 6，右下の数が 12 となるように 9 個の数を囲んだ場合を表している。

囲んだ 9 個の数の四すみの数について，左上の数と右下の数の和を P，右上の数と左下の数の和を Q としたとき，P＋Q の値が整数の 2 乗で表される数となる 9 個の数の囲み方は，全部で何通りあるか調べてみよう。

問１　次の［　　］の中の「**あ**」に当てはまる数字を答えよ。

［S さんが作った問題］で，P＋Q の値が整数の 2 乗で表される数となる 9 個の数の囲み方は，全部で［ **あ** ］通りある。

先生は，［S さんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

［先生が作った問題］

右の**図３**は，「かけ算九九の表」である。

n を 2 から 9 までの自然数とし，**図３**において，かけられる数とかける数を除く 81 個の数の中から，縦と横がともに n マスの正方形の枠を用いて，1 マスに 1 個の数が入るように，n^2 個の数を囲むことを考える。

囲んだ n^2 個の数の四すみの数について，左上の数と右下の数の和を P，右上の数と左下の数の和を Q としたとき，P－Q の値を求める。

例えば，$n=4$ のとき，左上の数が 1，右上の数が 4 となるように 16 個の数を囲んだ場合，

P－Q＝(1＋16)－(4＋4)＝9＝3^2 となる。

また，$n=5$ のとき，左上の数が 10，右上の数が 18 となるように 25 個の数を囲んだ場合，

P－Q＝(10＋54)－(18＋30)＝16＝4^2 となる。

図３で示した「かけ算九九の表」の中の数を，縦と横がともに n マスの正方形の枠を用いて囲むとき，P－Q＝$(n-1)^2$ となることを確かめなさい。

図３

かける数 / かけられる数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

問２　［先生が作った問題］で，縦と横がともに n マスの正方形の枠を用いて囲んだ n^2 個の数の四すみの数のうち，左上の数のかけられる数を a，かける数を b とする。

このとき，左上の数，右上の数，左下の数，右下の数をそれぞれ a，b，n を用いた式で表し，P－Q＝$(n-1)^2$ となることを証明せよ。

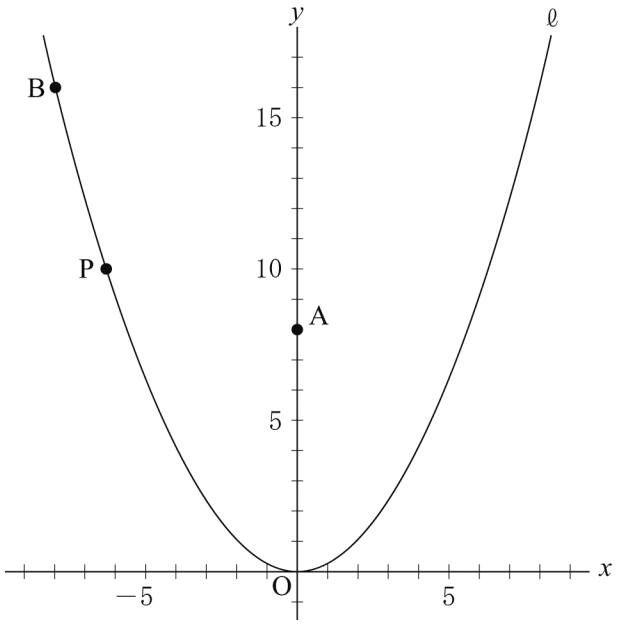
3 右の**図１**で，点Oは原点，点Aの座標は(0，8)であり，曲線ℓは関数$y=\frac{1}{4}x^2$のグラフを表している。

点Bは曲線ℓ上にあり，x座標は-8である。

曲線ℓ上にある点をPとする。

次の各問に答えよ。

図１



問１ 点Pが点Bに一致するとき，2点A，Pを通る直線の式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア $y=-x+8$　　**イ** $y=-\frac{1}{3}x+8$　　**ウ** $y=\frac{1}{3}x+8$　　**エ** $y=x+8$

問２ 点Pのx座標をa，y座標をbとする。

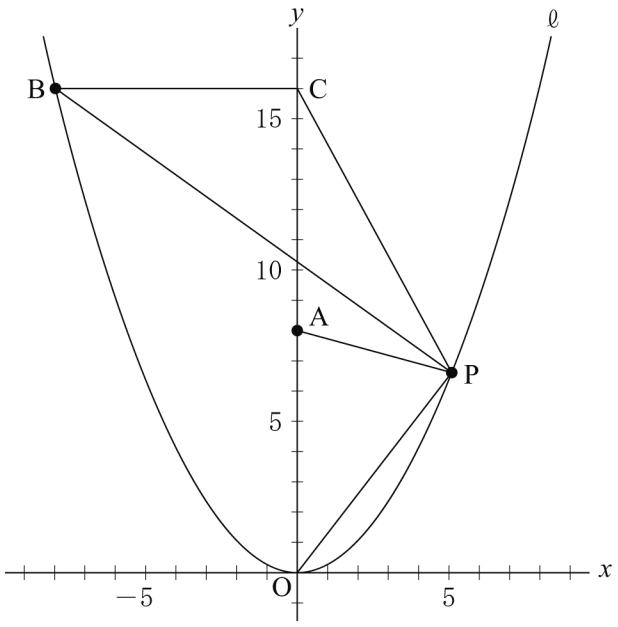
aのとる値の範囲が$-8\leqq a\leqq 6$のとき，bのとる値の範囲を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア $-16\leqq b\leqq 9$　　**イ** $0\leqq b\leqq 9$　　**ウ** $0\leqq b\leqq 16$　　**エ** $9\leqq b\leqq 16$

問３ 右の**図２**は，**図１**において，点Pのx座標が8より小さい正の数であるとき，点Bを通りx軸に平行な直線を引き，y軸との交点をCとし，点Oと点P，点Aと点P，点Bと点P，点Cと点Pをそれぞれ結んだ場合を表している。

△CBPの面積が△AOPの面積の3倍になるとき，点Pのx座標を求めよ。

図２



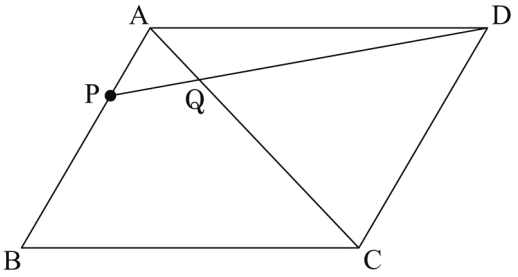
4 右の**図１**で，四角形 ABCD は，平行四辺形である。

点 P は，辺 AB 上にある点で，頂点 A，頂点 B のいずれにも一致しない。

頂点 A と頂点 C を結んだ線分と，頂点 D と点 P を結んだ線分との交点を Q とする。

次の各問に答えよ。

図１



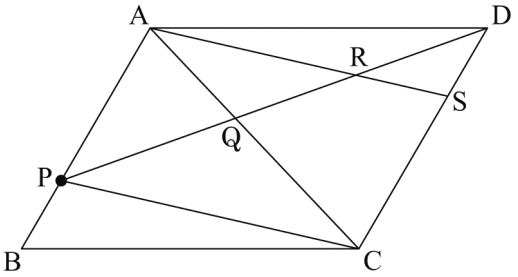
問１　**図１**において，∠ABC＝60°，∠DCA＝75°，∠ADP＝a° とするとき，△CDQ の内角である∠CQD の大きさを表す式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア　(45－a) 度　　**イ**　(60－a) 度　　**ウ**　(a＋30) 度　　**エ**　(a＋45) 度

問２　右の**図２**は，**図１**において，頂点 C と点 P を結び，頂点 A を通り線分 CP に平行な直線を引き，線分 DP との交点を R，辺 CD との交点を S とした場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

図２



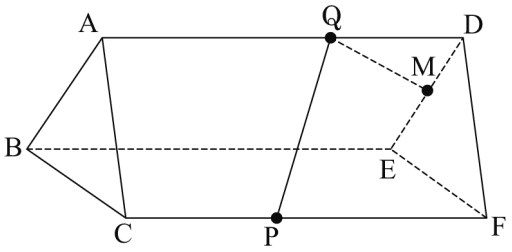
(1)　△AQR∽△CQP であることを証明せよ。

(2)　次の □ の中の「**い**」「**う**」「**え**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図２において，AP：PB＝2：1 のとき，△AQR の面積は，四角形 APCS の面積の $\frac{\boxed{\text{い}}}{\boxed{\text{うえ}}}$ 倍である。

5 右の**図１**に示した立体 ABC－DEF は，
AB＝BC＝CA＝4 cm，AD＝9 cm，
∠ABE＝∠CBE＝90° の正三角柱である。
辺 DE の中点を M とする。
辺 CF 上にある点を P，辺 AD 上にある点を Q とし，点 M と点 Q，点 P と点 Q をそれぞれ結ぶ。
次の各問に答えよ。

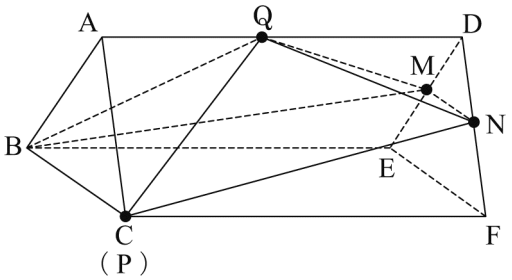
図１



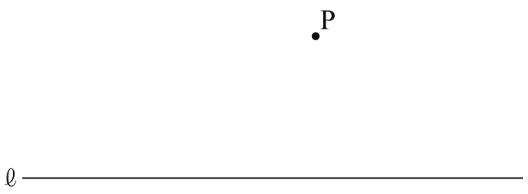
問１ 次の［　　］の中の「**お**」「**か**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。
図１において，PQ＋QM＝ℓ cm とする。
FP＝8 cm のとき，ℓ の値が最も小さくなる場合の ℓ の値は，［**おか**］である。

問２ 次の［　　］の中の「**き**」「**く**」「**け**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。
右の**図２**は，**図１**において，
点 P が頂点 C に一致するとき，
辺 DF の中点を N とし，頂点 B と点 M，
頂点 B と点 Q，点 M と点 N，
点 N と点 P，点 N と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。
DQ＝5 cm のとき，
立体 Q－BPNM の体積は，［**きく**］$\sqrt{}$［**け**］cm^3 である。

図２

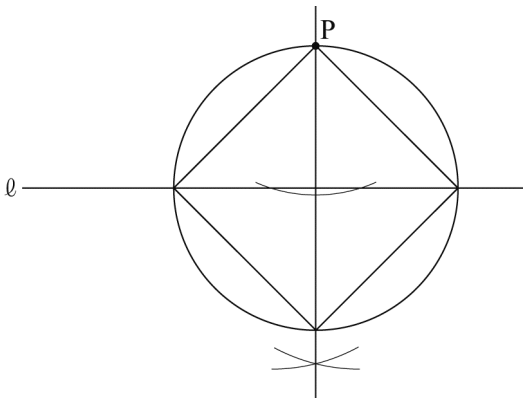


数学　解答用紙

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数−16−公−東京−XY−01	1	問１			
		問２			
		問３			
		問４			
		問５	$x=$　　，$y=$		
		問６			
		問７			
		問８	度		
		問９			

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数−16−公−東京−KY−02	2	問１	あ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問２	〔証明〕 $P-Q=(n-1)^2$			
数−16−公−東京−KY−03	3	問１	㋐　㋑　㋒　㋓			
		問２	㋐　㋑　㋒　㋓			
		問３				

	問題番号		解答		配点	備考
数−16−公−東京−KY−04	4	問１	㋐　㋑　㋒　㋓			
		問２	(1)	〔証明〕 △AQR と△CQP において， △AQR∽△CQP		
			(2)	い	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	
				う	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	
				え	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	
数−16−公−東京−KY−05	5	問１	お	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
			か	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問２	き	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
			く	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
			け	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数－16－公－東京－大－01	1	問１	-8	5	
		問２	$2a+9b$	5	
		問３	$7\sqrt{3}$	5	
		問４	4	5	
		問５	$x=2,\ y=5$	5	
		問６	$-6,\ 1$	5	
		問７	0.24	5	
		問８	80　度	5	
		問９		6	

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数－16－公－東京－大－02	2	問１	あ	3	5	
		問２	〔証明〕 左上の数について，かけられる数が a， かける数が b であることから， 左上の数は ab となる。 また，右上の数は a $\{b+(n-1)\}$， 左下の数は b $\{a+(n-1)\}$， 右下の数は $\{a+(n-1)\}$ $\{b+(n-1)\}$ と表すことができる。 $n-1=\mathrm{N}$ とおくと， $\mathrm{P}-\mathrm{Q}=\{ab+(a+\mathrm{N})(b+\mathrm{N})\}-\{a(b+\mathrm{N})+b(a+\mathrm{N})\}$ $=(ab+ab+a\mathrm{N}+b\mathrm{N}+\mathrm{N}^2)-(ab+a\mathrm{N}+ab+b\mathrm{N})$ $=ab+ab+a\mathrm{N}+b\mathrm{N}+\mathrm{N}^2-ab-a\mathrm{N}-ab-b\mathrm{N}$ $=\mathrm{N}^2$ $\mathrm{N}=n-1$ だから， $\mathrm{P}-\mathrm{Q}=(n-1)^2$		7	
数－16－公－東京－大－03	3	問１	ア		5	
		問２	ウ		5	
		問３	4		5	

	問題番号		解答			配点	備考
数−16−公−東京−大−04	4	問1	エ			5	
		問2	(1)	〔証明〕 △AQR と△CQP において， 対頂角は等しいから， ∠AQR＝∠OQP　……① 仮定から，AS // PC 平行線の錯角は等しいから， ∠ARQ＝∠CPQ　……② ①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから， △AQR∽△CQP		7	
			(2)	い	2	5	
				う	1		
				え	5		
数−16−公−東京−大−05	5	問1	お	1		5	
			か	0			
		問2	き	1		5	
			く	4			
			け	3			

数-16-公-東京-KS-01

1　問１　$-6-4^2\times\dfrac{1}{8}=-6-2=-8$

問２　$7a-b-5(a-2b)=7a-b-5a+10b=2a+9b$

問３　$\sqrt{48}+\dfrac{9}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

問４　$x+6=2(x+1)$　$x+6=2x+2$　$x=4$

問５　$9x-5y=-7\cdots①$，$-3x+2y=4\cdots②$とおく。①＋②×3 より $y=5$　②に代入して$-3x+10=4$
$3x=6$　$x=2$　よって，$x=2$，$y=5$

問６　$x^2+5x-6=0$　$(x+6)(x-1)=0$　$x=-6$，1

問７　48 分の記録を含む階級は，46～49 で度数は 12　よって，$\dfrac{12}{50}=0.24$

問８　O と C を直線で結ぶと，△OBC は 1 つの角が 40° の二等辺三角形に，△OCD は正三角形になり，∠BOD＝$2x$ となるので，△OBC において，$2\times40^\circ+(2x-60^\circ)=180^\circ$ より $x=80^\circ$

問９　点 P から直線 ℓ へ垂線 PH を下ろすと，PH は対角線の半分の長さになる。H を中心に PH を半径とする円をかくと，円と直線 ℓ，円と垂線 PH との 4 つの交点が正方形の 4 つの頂点となる。

数-16-公-東京-KS-02

2　問１　正方形の左上の数は，かけられる数を a，かける数を b をすると ab
右上の数は，かけられる数が a，かける数が $b+2$ なので $a(b+2)$
左下の数は，かけられる数が $a+2$，かける数が b なので$(a+2)b$
右下の数は，かけられる数が $a+2$，かける数が $b+2$ なので$(a+2)(b+2)$
P＋Q は正方形の四隅の数を加えたものになるから，
$ab+a(b+2)+(a+2)b+(a+2)(b+2)=4(ab+a+b+1)=4(a+1)(b+1)$
ここで，$4=2^2$ なので，$(a+1)(b+1)$が 2 乗で表されればよい。このとき，a も b も 1 から 3 まで調べればよいので，　$a=1$，$b=1$ と，$a=2$，$b=2$ と，$a=3$，$b=3$ の 3 通りがある。
なお，縦と横の 3 マスの正方形の四隅の数の和が 2 乗になればよく，左上の数が 1 のとき，$16=4^2$，2 のとき 24 でダメ，……を 9 回計算するのが試験のときは早い。ここでは，一般的な文字式を用いた方法を示した。

問２　問１の考え方を用いて，四隅の数を a，b，n を用いて表すことがポイントで，$n-1=N$ の置き換えも計算上大切である。

数-16-公-東京-KS-03

3　問１　A(0，8)，B は x 座標が-8 なので，$y=\dfrac{1}{4}\times(-8)^2=16$　求める直線の傾きは$\dfrac{8-16}{0-(-8)}=-1$
よって，$y=-x+8$　**（ア）**

問２　$-8\leqq a\leqq6$ なので，b のとる値の範囲は，$a=0$ のとき最小で 0，$a=-8$ のとき最大で 16
したがって，$0\leqq b\leqq16$　**（ウ）**

問３　P の x 座標を a とおくと，$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{4}a^2\right)$　また，BC＝OA＝8 なので，2 つの三角形の面積より，

$\dfrac{1}{2}\times8\times\left(16-\dfrac{1}{4}a^2\right)=3\times\dfrac{1}{2}\times8\times a$　したがって，$64-a^2=12a$
$(a-4)(a+16)=0$　$a>0$ より，$a=4$　よって，x 座標は 4

数-16-公-東京-KS-04

4　問１　AD // BC より錯角は等しいので，∠BAC＝∠ACD＝75°　また，∠DAC＝∠ACB
ここで，△ABC において内角の和は 180° だから∠ACB＝∠DAC＝$180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$
よって，∠CQD＝$a^\circ+45^\circ$　**（エ）**

問２　(1) 対頂角が等しいことと，錯角が等しいことから，相似を証明する。

(2) AP：PB＝2：1 と△APQ と△CQD が 2：3 の相似であることより，AQ：QC＝2：3
このことより，△AQR と△CQP の相似比は 2：3 である。
平行四辺形 APCS の面積を S とおくと，

$$\triangle CQP \text{ の面積} = \frac{1}{2}S \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}S$$

$$\triangle AQR \text{ の面積} = \frac{3}{10}S \times \frac{4}{9} = \frac{2}{15}S$$

よって，$\frac{2}{15}$ 倍である。

数-16-公-東京-KS-05

5 **問１**　長方形 ABED を辺 AD で折って，展開図で B と A と C と直線で結び長方形 BCFE をつくると，ℓ＝PQ＋QM は，P，Q，M が直線上にあるとき最小となる。△MPF について，三平方の定理より $\ell^2 = 8^2+6^2 = 100$
よって，ℓ＝10 で ℓ は最小値となる。

問２　△ABC の面積は，頂点 A から辺 BC へ垂線 AH を下ろすと，△ABH は 1：2：$\sqrt{3}$ の直角三角形なので，AH＝$2\sqrt{3}$　したがって面積は，$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$　同様に△DMN の面積は，$\sqrt{3}$
辺 AD, BM, CN の延長線の交点を O とおくと，立体 OABC は高さ 18cm の三角錐になり，立体 ODMN も高さ 9cm の三角錐になる。立体 ABC－DMN の体積は，$\frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 18 - \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 9 = 21\sqrt{3}$ (cm^3)
三角錐 Q－ABC の体積は，$\frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 4 = \frac{16}{3}\sqrt{3}$ (cm^3)
三角錐 Q－DMN の体積は，$\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 5 = \frac{5}{3}\sqrt{3}$ (cm^3)
よって，立体 Q－BPNM の体積は，$21\sqrt{3} - \left(\frac{16}{3}\sqrt{3} + \frac{5}{3}\sqrt{3}\right) = 14\sqrt{3}$ (cm^3)