H29　東京都　公立　数学　問題

数-17-公-東京-問-01

1　次の各問に答えよ。

問１　$6-9\times\left(-\frac{1}{3}\right)$　を計算せよ。

問２　$8a+b-(a-7b)$　を計算せよ。

問３　$(6+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$　を計算せよ。

問４　一次方程式　$3(x+5)=4x+9$　を解け。

問５　連立方程式　$\begin{cases} x+y=7 \\ 4x-y=8 \end{cases}$　を解け。

問６　二次方程式　$x^2+5x+2=0$　を解け。

問７　関数 $y=x^2$ について，x の変域が $-5 \leqq x \leqq 4$ のときの y の変域を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア　$-25 \leqq y \leqq 16$　　**イ**　$0 \leqq y \leqq 16$　　**ウ**　$0 \leqq y \leqq 25$　　**エ**　$16 \leqq y \leqq 25$

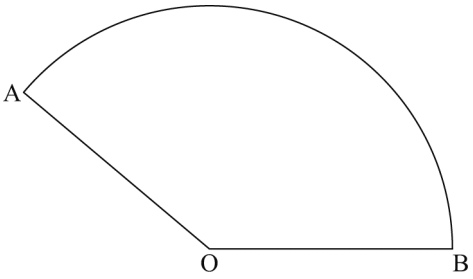
問８　1 から 6 までの目の出る大小 1 つずつのさいころを同時に 1 回投げるとき，出る目の数の和が 10 以下になる確率を求めよ。

ただし，大小 2 つのさいころはともに，1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

問９　右の図は，おうぎ形 OAB である。

$\overset{\frown}{AB}$上にあり，$3\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{BP}$となる点 P を，定規とコンパスを用いて作図によって求め，点 P の位置を示す文字 P も書け。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。



数-17-公-東京-問-02

2　ある中学校で，S さんが作った問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

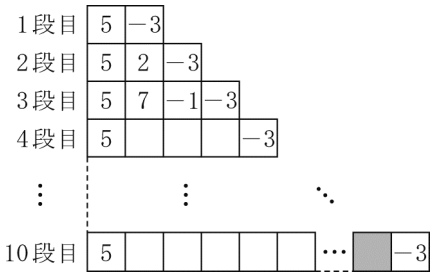
［S さんが作った問題］

右の**図１**のように，上から順に，1 段目に 2 個，2 段目に 3 個，3 段目に 4 個と，1 段ごとに 1 個ずつマスを増やし，左端のマスが縦にそろうように 10 段目まで並べたものを考える。

全ての段の左端のマスに 5，右端のマスに－3 を入れる。

2 段目以降にある両端のマス以外のそれぞれのマスに，1 つ上の段にある真上のマスと，その左隣のマスに入っている 2 つの数の和を入れる。例えば，2 段目の中央のマスには，1 段目の－3 と 1 段目の 5 の和である 2 が入る。

図１



このとき，10 段目にある ■ で示したマスに入る数を考えてみよう。

なお，**図１**は，全ての段の左端のマスに 5，右端のマスに－3 を入れ，両端のマス以外のそれぞれのマスについて，2 段目，3 段目の順に，3 段目まで数を入れた場合を表している。

問１　［S さんが作った問題］で，10 段目にある ■ で示したマスに入る数を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア　－22　　**イ**　－19　　**ウ**　37　　**エ**　42

先生は，［S さんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

［先生が作った問題］

右の**図２**は，上から順に，1 段目に 2 個，2 段目に 3 個，3 段目に 4 個と，1 段ごとに 1 個ずつマスを増やし，左端のマスが縦にそろうように 5 段目まで並べたものである。

図２

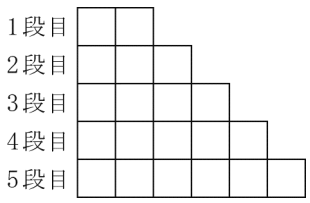
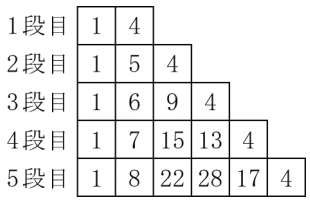


図３は，**図２**において，全ての段の左端のマスに 1，右端のマスに 4 を入れ，2 段目以降にある両端のマス以外のそれぞれのマスに，1 つ上の段にある真上のマスと，その左隣のマスに入っている 2 つの数の和を入れたものである。

図３のそれぞれの段において，全てのマスに入っている数の和について考えると，



1 段目は，1＋4＝5

2 段目は，1＋5＋4＝10＝5×2

3 段目は，1＋6＋9＋4＝20＝5×4

4 段目は，1＋7＋15＋13＋4＝40＝5×8

5 段目は，1＋8＋22＋28＋17＋4＝80＝5×16 となり，

2 段目以降のそれぞれの段において，全てのマスに入っている数の和は，1 段目の 2 個のマスに入っている数の和である 5 の倍数となっている。

図２において，全ての段の左端のマスに入れる数を a，右端のマスに入れる数を b とし，2 段目以降にある両端のマス以外のそれぞれのマスに，1 つ上の段にある真上のマスと，その左隣のマスに入っている 2 つの数の和を入れるとき，5 段目にある 6 個のマスに入っている数の和は，1 段目の 2 個のマスに入っている数の和の 16 倍となることを確かめなさい。

ただし，a，b は自然数とする。

問２　［先生が作った問題］で，5 段目にある 6 個のマスに入っている数をそれぞれ a，b を用いた式で表し，5 段目にある 6 個のマスに入っている数の和は，1 段目の 2 個のマスに入っている数の和の 16 倍となることを証明せよ。

3 右の**図１**で，点Oは原点，直線ℓは一次関数$y=-3x+9$のグラフを表している。

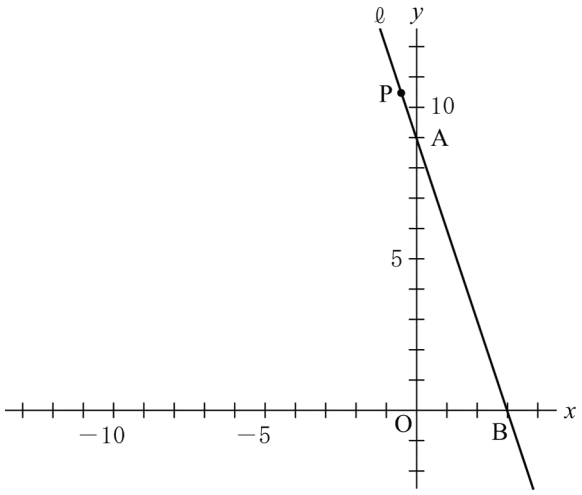
直線ℓとy軸との交点をA，

直線ℓとx軸との交点をBとする。

直線ℓ上にある点をPとする。

次の各問に答えよ。

図１



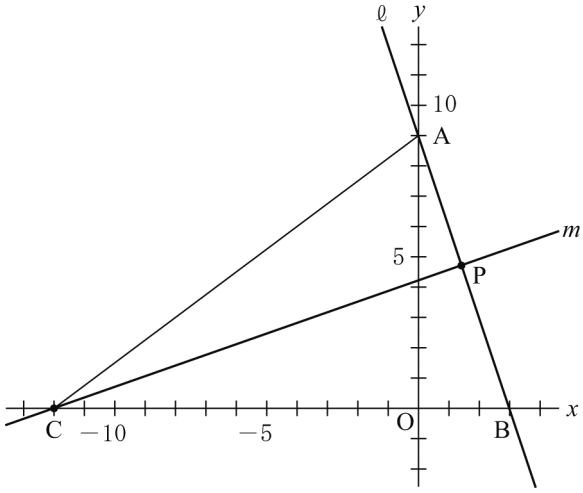
問１ 次の［　　］の中の「**あ**」「**い**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

点Pのx座標が-1のとき，点Pのy座標は，［**あい**］である。

問２ 右の**図２**は，**図１**において，点Pのx座標が3より小さい正の数であるとき，x軸上にあり，x座標が-12である点をCとし，点Aと点Cを結び，2点C，Pを通る直線をmとした場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

図２



(1) 直線mが△ACBの面積を2等分するとき，直線mの式を求めよ。

(2) 次の［　　］の中の「**う**」「**え**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図２において，y軸を対称の軸として点Bと線対称な点をDとし，点Dと点Pを結んだ場合を考える。

△CDPの面積が△ACPの面積の$\frac{2}{5}$倍になるとき，

点Pのx座標は，$\frac{\boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}}$である。

4 右の**図１**で，四角形 ABCD は，AB＝6 cm，BC＝12 cm の長方形である。

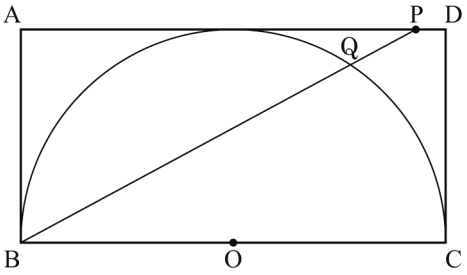
辺 BC を直径とする半円 O の$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$は，2 つの頂点 B，C を通る直線に対して頂点 A と同じ側にある。

点 P は，辺 AD 上にある点で，頂点 A に一致しない。

頂点 B と点 P を結んだ線分と，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$との交点のうち，頂点 B と異なる点を Q とする。

次の各問に答えよ。

図１



問１　**図１**において，∠PBC＝a° とするとき，$\overset{\frown}{\mathrm{CQ}}$の長さを表す式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ただし，円周率はπとする。

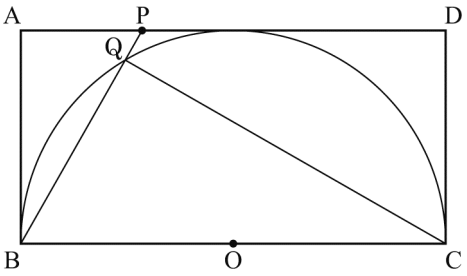
ア　$12\pi a$ cm　　**イ**　$6\pi a$ cm　　**ウ**　$\dfrac{1}{10}\pi a$ cm　　**エ**　$\dfrac{1}{15}\pi a$ cm

問２　右の**図２**は，**図１**において，頂点 C と点 Q を結んだ場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　△ABP∽△QCB であることを証明せよ。

図２



(2)　次の［　　］の中の「**お**」「**か**」「**き**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図２において，AP：PD＝1：3 のとき，

線分 PQ の長さは，$\dfrac{\boxed{\text{お}}\sqrt{\boxed{\text{か}}}}{\boxed{\text{き}}}$ cm である。

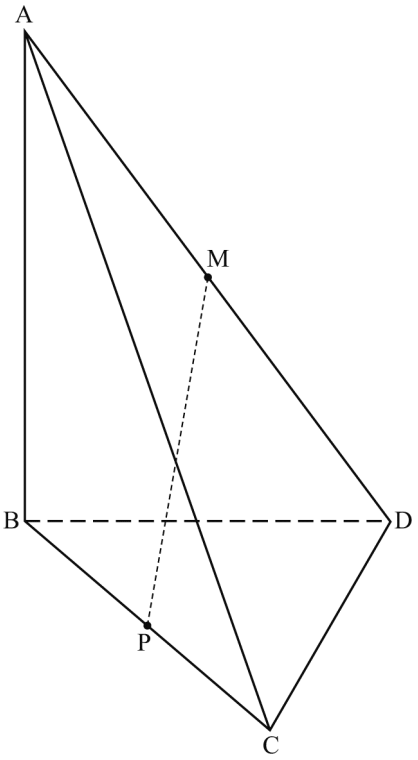
5 右の**図１**に示した立体 A－BCD は，AB＝8 cm，BC＝BD＝6 cm，∠ABC＝∠ABD＝90°，∠CBD＝60°の三角すいである。

辺 AD の中点を M とする。

辺 BC 上にある点を P とし，点 M と点 P を結ぶ。

次の各問に答えよ。

図１



問１ 次の ［　　］ の中の「**く**」に当てはまる数字を答えよ。

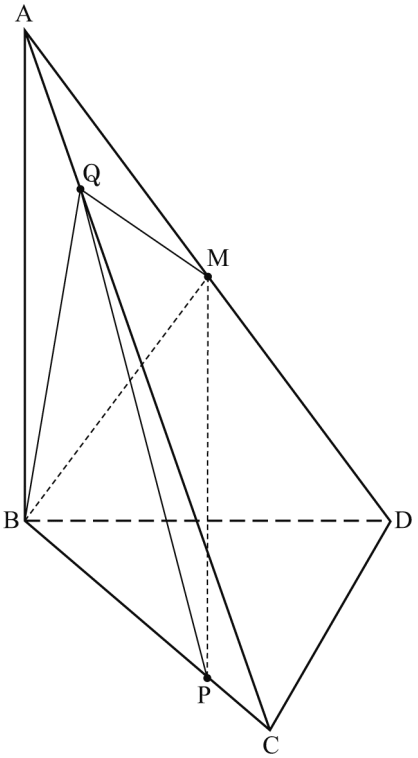
点 P が辺 BC の中点となるとき，線分 MP の長さは，［ く ］ cm である。

問２ 次の ［　　］ の中の「**け**」「**こ**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

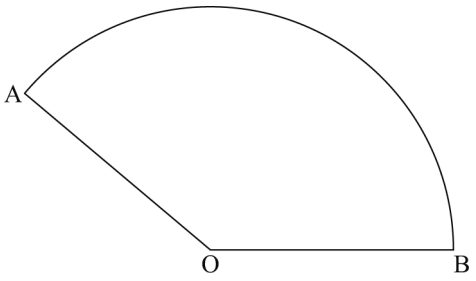
右の**図２**は，**図１**において，辺 AC 上にある点を Q とし，頂点 B と点 M，頂点 B と点 Q，点 M と点 Q，点 P と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。

BP＝5 cm，AQ＝2 cm のとき，立体 M－QBP の体積は，［ け ］$\sqrt{\text{［ こ ］}}$ cm^3 である。

図２

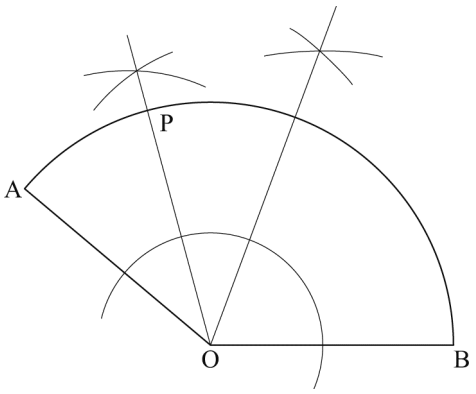


H29　東京都　公立　数学　解答用紙

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数−17−公−東京−KY−01	1	問１			
		問２			
		問３			
		問４			
		問５	$x=$　　，$y=$		
		問６			
		問７	㋐　㋑　㋒　㋓		
		問８			
		問９			

	問題番号		解　　答			配点	備　　考
数−17−公−東京−KY−02	2	問１	㋐　㋑　㋒　㋓				
		問２	〔証明〕				
数−17−公−東京−KY−03	3	問１	あ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨			
			い	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨			
		問２	(1)	$y=$			
			(2)	う	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				え	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		

	問題番号		解答		配点	備考
数−17−公−東京−KY−04	4	問1	㋐　㋑　㋒　㋓			
		問2	(1)	〔証明〕 △ABP と△QCB において， △ABP∽△QCB		
			(2)	お　⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				か　⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				き　⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
数−17−公−東京−KY−05	5	問1	く	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問2	け	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
			こ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-17-公-東京-K-01	1	問１	9	5	
		問２	$7a+8b$	5	
		問３	$4-5\sqrt{2}$	5	
		問４	6	5	
		問５	$x=3,\ y=4$	5	
		問６	$\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$	5	
		問７	ウ	5	
		問８	$\dfrac{11}{12}$	5	
		問９		6	

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">問題番号</th><th colspan="3">解　　答</th><th>配点</th><th>備　　考</th></tr>
<tr><td rowspan="2">数−17−公−東京−K−02</td><td rowspan="2">2</td><td>問１</td><td colspan="3">ア</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>問２</td><td colspan="3">〔証明〕
5 段目の 6 個のマスに入っている数をそれぞれ a，b を用いた式で表すと，左から，
a，$4a+b$，$6a+4b$，$4a+6b$，$a+4b$，b
となり，その和は，
$a+(4a+b)+(6a+4b)+(4a+6b)+(a+4b)+b$
$=16a+16b$
$=16(a+b)$　となる。
また，1 段目の 2 個のマスに入っている数の和は $a+b$ と表せる。
よって，5 段目の 6 個のマスに入っている数の和は，1 段目の 2 個のマスに入っている数の和の 16 倍となる。</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">数−17−公−東京−K−03</td><td rowspan="4">3</td><td rowspan="2">問１</td><td>あ</td><td colspan="2">1</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>い</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問２</td><td>(1)</td><td colspan="2">$y=\frac{1}{3}x+4$</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>う</td><td>9</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>え</td><td>5</td></tr>
</table>

	問題番号		解答		配点	備考
数−17−公−東京−K−04	4	問1	エ		5	
		問2	(1)	〔証明〕 △ABP と△QCB において， 四角形 ABCD は長方形だから， ∠PAB＝90° 半円の弧に対する円周角は直角だから， ∠BQC＝90° よって， ∠PAB＝∠BQC　…… ① 長方形の対辺は平行だから，AD // BC 平行線の錯角は等しいから， ∠APB＝∠QBC　…… ② ①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから， △ABP∽△QCB	7	
			(2)	お　3 か　5 き　5	5	
数−17−公−東京−K−05	5	問1	く	5	5	
		問2	け	8	5	
			こ	3		

数-17-公-東京-KS-01

1　問１　$6-9\times\left(-\frac{1}{3}\right)=6-(-3)=6+3=9$

問２　$8a+b-(a-7b)=8a+b-a+7b=7a+8b$

問３　$(6+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=6-6\sqrt{2}+\sqrt{2}-2=4-5\sqrt{2}$

問４　$3(x+5)=4x+9$　$3x+15=4x+9$　$3x-4x=9-15$　$-x=-6$　$x=6$

問５　$x+y=7$…①，$4x-y=8$…②とする。①＋②より，$x+4x=7+8$　$5x=15$　$x=3$…③
①に③を代入して，$3+y=7$　$y=4$

問６　解の公式より，$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

問７　x の変域に 0 を含むので，y の値が最小となるのは，$x=0$ のときで，$y=0$
y の値が最大となるのは，-5 と 4 で絶対値の大きい $x=-5$ のときで，$y=(-5)^2=25$　よって，y の変域は，$0\leqq y\leqq25$

問８　大小 2 つのさいころの目の出方は全部で 36 通り
このうち，出る目の数の和が 10 より大きくなる場合は，(大，小)＝(5，6)，(6，5)，(6，6) の 3 通り。
よって，出る目の数の和が 10 以下になる確率は，$1-\frac{3}{36}=\frac{11}{12}$

問９　$3\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\overset{\frown}{\mathrm{BP}}$ となる点 P が $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上にあるとき，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ が成り立つ。
∠AOB の二等分線と $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ との交点を Q とすると，∠AOQ の二等分線と $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ との交点が P となる。

数-17-公-東京-KS-02

2　問１　右端のマスの左隣のマスに入る数は，1 段目から順に，5，2，-1，…となり，
3 ずつ小さくなっていく。よって，求める数は，$5-3\times(10-1)=-22$

問２　左端のマスの右隣のマスに入る数は，2 段目からはじまり，上から順に，$a+b$，$2a+b$，$3a+b$，$4a+b$ と表される。
左端のマスの 2 個右隣のマスに入る数は，3 段目からはじまり，上から順に，$a+2b$，$3a+3b$，$6a+4b$ と表される。
左端のマスの 3 個右隣のマスに入る数は，4 段目からはじまり，上から順に，$a+3b$，$4a+6b$ と表される。
左端のマスの 4 個右隣のマスに入る数は，5 段目だけにあり，$a+4b$ と表される。
よって，5 段目にある 6 個のマスに入る数は，a，$4a+b$，$6a+4b$，$4a+6b$，$a+4b$，b となるから，
それらの和は，$a+(4a+b)+(6a+4b)+(4a+6b)+(a+4b)+b=16a+16b=16(a+b)$
$a+b$ は，1 段目の 2 個のマスに入っている数の和である。
したがって，5 段目にある 6 個のマスに入っている数の和は，1 段目の 2 個のマスに入っている数の和の 16 倍となる。

数-17-公-東京-KS-03

3　問１　点 P は直線 ℓ 上にあるから，$y=-3x+9$ に $x=-1$ を代入して，$y=-3\times(-1)+9=12$

問２　(1) 直線 m が△ACB の面積を 2 等分するとき，点 P は線分 AB の中点となる。
点 P から x 軸に垂線をひき，x 軸との交点を Q とすると，OQ：QB＝AP：PB＝1：1
点 B は直線 ℓ と x 軸との交点だから，$y=-3x+9$ に $y=0$ を代入して，$0=-3x+9$　$x=3$
よって，OB＝3 より，$\mathrm{OQ}=\mathrm{QB}=\frac{3}{2}$ だから，$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ となり，点 P の x 座標は $\frac{3}{2}$
点 P は直線 ℓ 上にあるから，$y=-3x+9$ に $x=\frac{3}{2}$ を代入して，$y=-3\times\frac{3}{2}+9=\frac{9}{2}$
よって，点 P の y 座標は $\frac{9}{2}$
したがって，直線 m は 2 点 C(−12，0)，$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right)$ を通るので，傾きは，
$\left(\frac{9}{2}-0\right)\div\left\{\frac{3}{2}-(-12)\right\}=\frac{9}{2}\div\frac{27}{2}=\frac{1}{3}$ より，直線 m の式を $y=\frac{1}{3}x+b$ とすると，
$x=-12$，$y=0$ を代入して，$0=\frac{1}{3}\times(-12)+b$　$b=4$
よって，直線 m の式は，$y=\frac{1}{3}x+4$

(2) まず，点 D の座標を求めると，点 B と y 軸を対称の軸として線対称だから，B(3，0) より，
D(−3，0)　次に，点 P の x 座標を p とおくと，直線 ℓ 上の点だから y 座標は，$-3p+9$ となる。
よって，△CDP の面積を求めると，$\triangle\mathrm{CDP}=\frac{1}{2}\times\{(-3)-(-12)\}\times(-3p+9)=-\frac{27}{2}p+\frac{81}{2}$
また，△ACP の面積は，△ACB の面積から△PCB の面積を引いたものになるので，
$\triangle\mathrm{ACP}=\frac{1}{2}\times\{3-(-12)\}\times9-\frac{1}{2}\times\{3-(-12)\}\times(-3p+9)=\frac{45}{2}p$
よって，△CDP の面積が△ACP の面積の $\frac{2}{5}$ 倍になるから，$-\frac{27}{2}p+\frac{81}{2}=\frac{2}{5}\times\frac{45}{2}p$ が成り立つ。
これを整理すると，$x=\frac{9}{5}$　したがって，点 P の x 座標は $\frac{9}{5}$

数-17-公-東京-KS-04

4　**問１**　円周角の定理より，∠QOC＝2∠QBC＝2a° だから，$\overset{\frown}{\mathrm{CQ}}$ の長さは，$2\pi\times6\times\frac{2a}{360}=\frac{1}{15}\pi a$ (cm)

問２　(1) △ABP と△QCB において，
四角形 ABCD は長方形だから，∠PAB＝90°
半円の弧に対する円周角は直角だから，∠BQC＝90°
よって，∠PAB＝∠BQC…①
AD // BC より，平行線の錯角は等しいから，∠APB＝∠QBC…②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△ABP∽△QCB
∠ABP＝∠ABC−∠QBC＝90°−∠QBC，
∠QCB＝180°−∠BQC−∠QBC＝180°−90°−∠QBC＝90°−∠QBC となることから，
∠ABP＝∠QCB を示し，①，②のどちらかの代わりとして用いてもよい。

(2) AD＝BC＝12cm，AP：PD＝1：3 だから，$\mathrm{AP}=12\times\frac{1}{1+3}=3$ (cm)
△ABP において，BP＝x cm とすると，三平方の定理より，$6^2+3^2=x^2$　$x^2=45$　$x>0$ だから，$x=3\sqrt{5}$
△ABP∽△QCB より，AP：QB＝BP：CB だから，QB＝y cm とすると，
$3:y=3\sqrt{5}:12$　$3\sqrt{5}\,y=36$　$y=\frac{12\sqrt{5}}{5}$
よって，$\mathrm{PQ}=\mathrm{BP}-\mathrm{QB}=3\sqrt{5}-\frac{12\sqrt{5}}{5}=\frac{15\sqrt{5}}{5}-\frac{12\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (cm)

5 **問1**　辺 BD の中点を N とする。△ABD において，中点連結定理より，MN // AB

また，$MN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$(cm)

BC＝BD，∠CBD＝60°より，∠BCD＝∠BDC＝(180°－60°)÷2＝60°だから，
△BCD は正三角形である。このことから，CD＝BC＝6 cm

△BCD において，中点連結定理より，$PN=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 6=3$ (cm)

辺 AB と面 BCD は垂直で，MN // AB だから，線分 MN と面 BCD も垂直となる。
よって，△MNP は，∠MNP＝90°の直角三角形だから，MP＝x cm とすると，三平方の定理より，
$4^2+3^2=x^2$　$x^2=25$　$x>0$ だから，$x=5$

問2　立体 A－BCD の体積を V とする。点 M は辺 AD の中点だから，(立体 M－BCD)＝$\frac{1}{2}V$

よって，(立体 A－BCM)＝(立体 A－BCD)－(立体 M－BCD)＝$V-\frac{1}{2}V=\frac{1}{2}V$

△ABC において，AC＝y cm とすると，三平方の定理より，
$8^2+6^2=y^2$　$y^2=100$　$y>0$ だから，$y=10$　QC＝AC－AQ＝10－2＝8 (cm)だから，
(立体 Q－BCM)＝(立体 A－BCM)$\times\frac{8}{10}=\frac{1}{2}V\times\frac{8}{10}=\frac{2}{5}V$

BC＝6 cm，BP＝5 cm だから，(立体 Q－BPM)＝(立体 Q－BCM)$\times\frac{5}{6}=\frac{2}{5}V\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}V$

このことから，(立体 M－QBP)＝$\frac{1}{3}V$ となる。

1 辺の長さが 6 cm の正三角形の高さを h cm とすると，三平方の定理より，
$3^2+h^2=6^2$　$h^2=27$　$h>0$ だから，$h=3\sqrt{3}$

よって，△BCD の面積は，$\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ (cm^2)だから，

立体 A－BCD の体積は，$\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 8=24\sqrt{3}$ (cm^3)

したがって，立体 M－QBP の体積は，$\frac{1}{3}\times 24\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ (cm^3)