H30　東京都　公立　数学　問題

数-18-公-東京-問-01

1　次の各問に答えよ。

問１　$5-\frac{1}{3}\times(-9)$　を計算せよ。

問２　$8(a+b)-(4a-b)$　を計算せよ。

問３　$(\sqrt{7}+2\sqrt{3})(\sqrt{7}-2\sqrt{3})$　を計算せよ。

問４　一次方程式　$4x-5=x-6$　を解け。

問５　連立方程式　$\begin{cases}7x-y=8\\-9x+4y=6\end{cases}$　を解け。

問６　二次方程式　$x^2+12x+35=0$　を解け。

問７　次の［　　］の中の「**あ**」「**い**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の表は，東京のある地点における４月７日の最高気温について，過去 40 年間の記録を調査し，度数分布表に整理したものである。

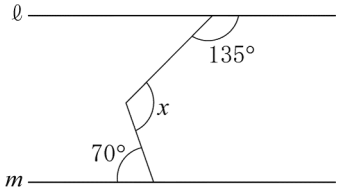
最高気温が 18℃以上であった日数は，全体の日数の［**あい**］％である。

階級(℃)			度数(日)
以上		未満	
8	～	10	1
10	～	12	4
12	～	14	2
14	～	16	7
16	～	18	8
18	～	20	5
20	～	22	9
22	～	24	4
計			40

問８　次の［　　］の中の「**う**」「**え**」「**お**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の**図１**で，ℓ // m のとき，x で示した角の大きさは，［**うえお**］度である。

図１

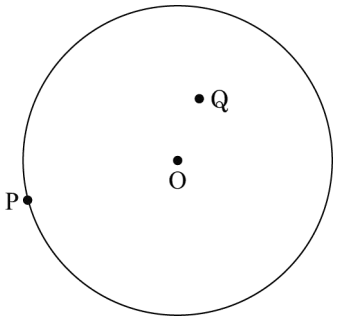


問９　右の**図２**のように，円 O の周上に点 P，円 O の内部に点 Q がある。

点 P が点 Q に重なるように 1 回だけ折るとき，折り目と重なる直線ℓを，定規とコンパスを用いて作図し，直線ℓを示す文字ℓも書け。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図２



数-18-公-東京-問-02

2　ある中学校で，S さんが作った問題をみんなで考えた。次の各問に答えよ。

［S さんが作った問題］

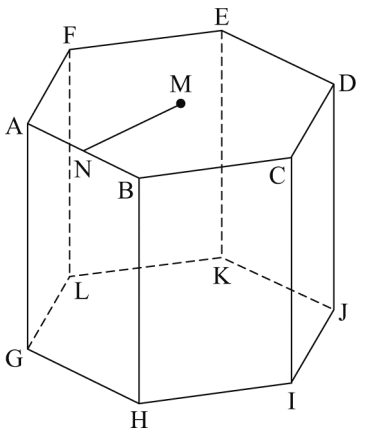
a，b，h を正の数とする。

右の**図１**に示した立体 ABCDEF－GHIJKL は，底面が 1 辺 a cm の正六角形，高さが h cm，6 つの側面が全て合同な長方形の正六角柱である。

正六角形 ABCDEF において，対角線 AD と対角線 CF の交点を M，点 M から辺 AB に垂線を引き，辺 AB との交点を N とし，線分 MN の長さを b cm とする。

立体 ABCDEF－GHIJKL の表面積を P cm^2 とするとき，P を a，b，h を用いて表してみよう。

図１



T さんは，［S さんが作った問題］の答えを次の形の式で表した。T さんの答えは正しかった。

〈T さんの答え〉 P＝6a(　　)

問１　〈T さんの答え〉の［　　］に当てはまる式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア　$\frac{1}{2}b+h$　　**イ**　$b+h$　　**ウ**　$b+2h$　　**エ**　$2b+h$

先生は，［S さんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

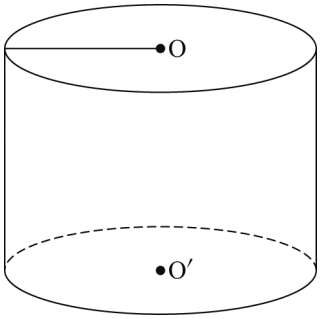
［先生が作った問題］

h，ℓ，r を正の数とする。

右の**図２**に示した立体は，底面が半径 r cm の円，高さが h cm の円柱であり，２つの底面の中心 O，O′ を結んでできる線分は，２つの底面に垂直である。

この立体について，底面の円周をℓ cm，表面積を Q cm^2 とするとき，$Q=\ell(h+r)$ となることを確かめなさい。

図２



問２　［先生が作った問題］で，ℓを r を用いて表し，$Q=\ell(h+r)$ となることを証明せよ。ただし，円周率はπとする。

数-18-公-東京-問-03

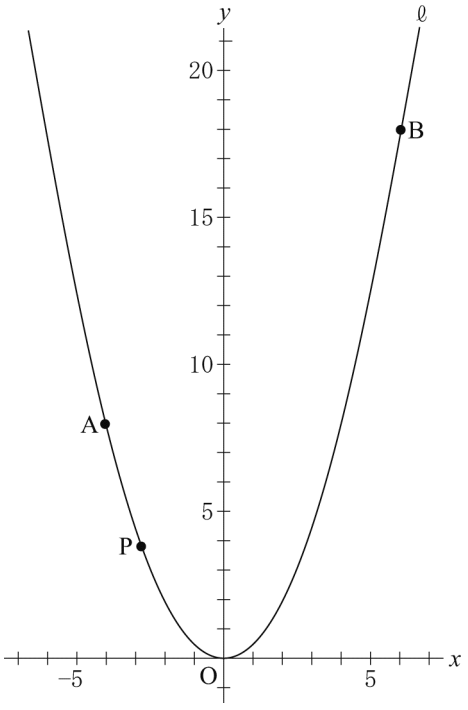
3　右の**図１**で，点 O は原点，曲線ℓは関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを表している。

点 A，点 B はともに曲線ℓ上にあり，x 座標はそれぞれ-4，6 である。

曲線ℓ上にある点を P とする。

次の各問に答えよ。

図１



問１　点 P の x 座標を a，y 座標を b とする。

a のとる値の範囲が$-4\leqq a\leqq 6$ のとき，b のとる値の範囲を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

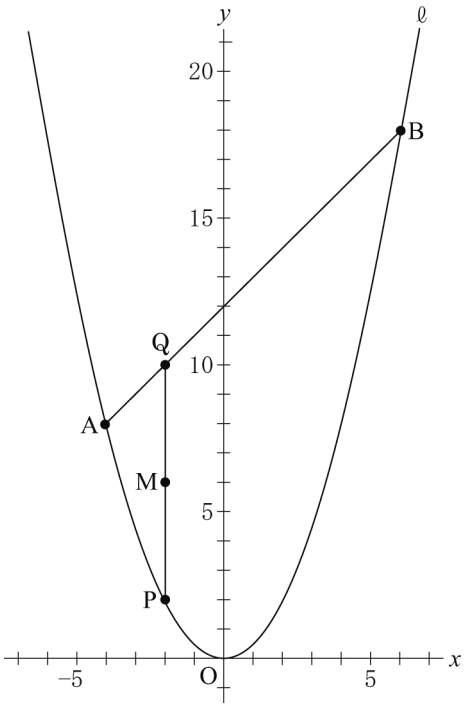
ア　$-8\leqq b\leqq 18$　　**イ**　$0\leqq b\leqq 8$

ウ　$0\leqq b\leqq 18$　　**エ**　$8\leqq b\leqq 18$

問２　右の**図２**は，**図１**において，点Pのx座標が-4より大きく6より小さい数のとき，点Aと点Bを結び，線分AB上にありx座標が点Pのx座標と等しい点をQとし，点Pと点Qを結び，線分PQの中点をMとした場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

図２



(1) 点Pがy軸上にあるとき，2点B，Mを通る直線の式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア　$y=2x+6$　　**イ**　$y=\frac{1}{2}x+6$

ウ　$y=3x$　　**エ**　$y=2x$

(2) 直線BMが原点を通るとき，点Pの座標を求めよ。

数-18-公-東京-問-04

4　右の**図１**で，点Oは線分ABを直径とする円の中心である。

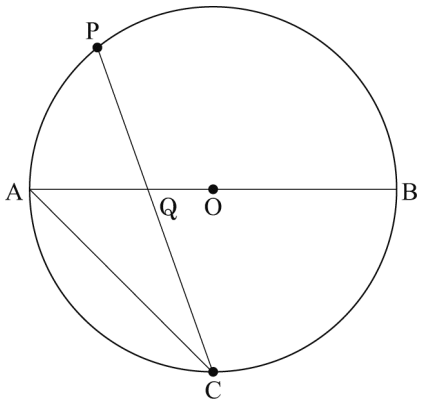
点Cは円Oの周上にある点で，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$である。

点Pは，点Cを含まない$\overset{\frown}{AB}$上にある点で，点A，点Bのいずれにも一致しない。

点Aと点C，点Cと点Pをそれぞれ結び，線分ABと線分CPとの交点をQとする。

次の各問に答えよ。

図１



問１　**図１**において，$\angle ACP=a^\circ$とするとき，$\angle AQP$の大きさを表す式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

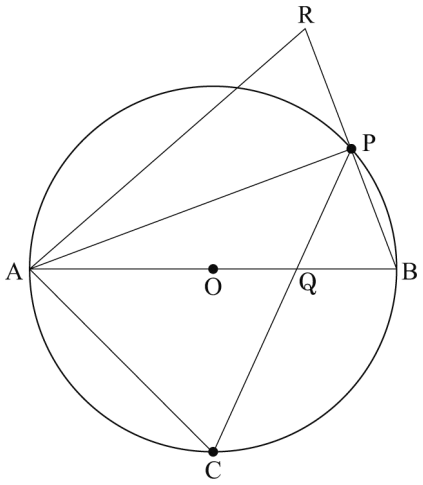
ア　$(60-a)$度　　**イ**　$(90-a)$度　　**ウ**　$(a+30)$度　　**エ**　$(a+45)$度

問２　右の**図２**は，**図１**において，点 A と点 P，点 B と点 P をそれぞれ結び，線分 BP を P の方向に延ばした直線上にあり BP＝RP となる点を R とし，点 A と点 R を結んだ場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

(1) △ABP≡△ARP であることを証明せよ。

図２



(2) 次の ［　　］ の中の「**か**」「**き**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図２において，点 O と点 P を結んだ場合を考える。

$\overset{\frown}{BC}=2\overset{\frown}{BP}$のとき，

△ACQ の面積は，四角形 AOPR の面積の $\dfrac{\boxed{\text{か}}}{\boxed{\text{き}}}$倍である。

数-18-公-東京-問-05

5　右の**図１**に示した立体 ABC－DEF は，

AB＝AC＝AD＝9 cm，

∠BAC＝∠BAD＝∠CAD＝90°の三角柱である。

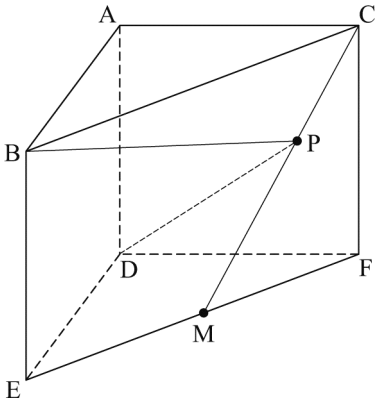
辺 EF の中点を M とする。

頂点 C と点 M を結び，線分 CM 上にある点を P とする。

頂点 B と点 P，頂点 D と点 P をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

図１



問１　次の ［　　］ の中の「**く**」「**け**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

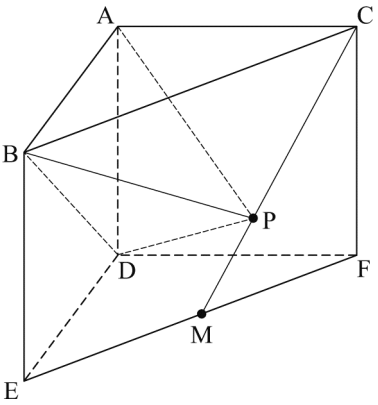
図１において，点 P が頂点 C に一致するとき，∠BPD の大きさは，［**くけ**］度である。

問２　次の［　　］の中の「**こ**」「**さ**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

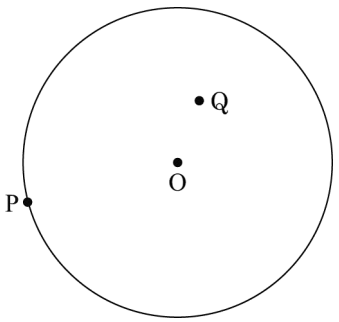
右の**図２**は，**図１**において，頂点Ａと点Ｐ，頂点Ｂと頂点Ｄをそれぞれ結んだ場合を表している。

ＣＰ：ＰＭ＝２：１のとき，立体Ｐ－ＡＢＤの体積は，［**こさ**］ cm^3 である。

図２

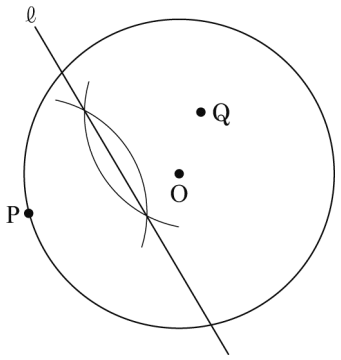


数学　解答用紙

	問題番号		解　　答			配点	備　　考
数－18－公－東京－KY－01	1	問１					
		問２					
		問３					
		問４					
		問５	$x=$　　，$y=$				
		問６					
		問７	あい	あ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				い	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問８	うえお	う	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				え	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				お	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問９					

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数−18−公−東京−KY−02	2	問１	㋐　㋑　㋒　㋓		
		問２	〔証明〕 $Q=\ell(h+r)$		
数−18−公−東京−KY−03	3	問１	㋐　㋑　㋒　㋓		
		問２	(1)　㋐　㋑　㋒　㋓		
			(2)　(　　,　　)		
数−18−公−東京−KY−04	4	問１	㋐　㋑　㋒　㋓		
		問２	(1)　〔証明〕 △ABP と△ARP において, △ABP≡△ARP		
			(2)　か　⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ き　⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		

	問題番号		解答			配点	備考
数−18−公−東京−KY−05	5	問１	くけ	く	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				け	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問２	こさ	こ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				さ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		

	問題番号		解答			配点	備考
数－18－公－東京－大－01	1	問１	8			5	
		問２	$4a+9b$			5	
		問３	-5			5	
		問４	$-\frac{1}{3}$			5	
		問５	$x=2,\ y=6$			5	
		問６	$-7,\ -5$			5	
		問７	あい	あ	4	5	
				い	5		
		問８	うえお	う	1	5	
				え	1		
				お	5		
		問９				6	**採点のポイント** ○線分 PQ の垂直二等分線の作図の方法を用いて，点 P が点 Q に重なるように 1 回だけ折るときの折り目と重なる直線ℓが正確に示されている。

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数−18−公−東京−大−02	2	問１	イ	5	
		問２	〔証明〕 円柱の側面は，縦の長さが h cm，横の長さが底面の円周の長さに等しい長方形だから， 側面積は $2\pi r\times h=2\pi rh$ 底面積は πr^2 となる。 したがって，表面積 Q は， $Q=2\pi rh+2\pi r^2$ ……(1) $\ell=2\pi r$ だから， $\ell(h+r)=2\pi r(h+r)$ $=2\pi rh+2\pi r^2$ ……(2) (1)，(2)より， $Q=\ell(h+r)$	7	**採点のポイント** ○(柱体の表面積)＝(側面積)＋2×(底面積) の考え方によって，円柱の表面積を，文字を用いた式で表されている。 ○$Q=\ell(h+r)$ の両辺について，それぞれを h，r の文字を用いた式で表し，等式が成り立つことが的確に示されている。
数−18−公−東京−大−03	3	問１	ウ	5	
		問２ (1)	ア	5	
		問２ (2)	(4，8)	5	
数−18−公−東京−大−04	4	問１	エ	5	
		問２ (1)	〔証明〕 △ABP と△ARP において， 仮定から， BP＝RP ……(1) 半円の弧に対する円周角だから， ∠APB＝90° ……(2) (2)より，AP⊥BR だから， ∠APB＝∠APR ……(3) 共通な辺だから， AP＝AP ……(4) (1)，(3)，(4)より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから， △ABP≡△ARP	7	**採点のポイント** ○証明に必要となる，長さの等しい辺や大きさの等しい角について，根拠を明らかにし，その関係を式で表すことができている。(3 か所) ○合同条件を正しく書き，結論を導くことができている。
		問２ (2)	か／き　か：2　き：3	5	

	問題番号		解答			配点	備考
数－Ⅰ8－公－東京大－05	5	問１	くけ	く	6	5	
				け	0		
		問２	こさ	こ	8	5	
				さ	1		

各学校において，採点のポイントを踏まえて『部分点の基準』を作成し，『部分点の基準ごとの点数』を定めること。

なお，受検者の実態等に応じて，次の例のように詳細な基準を定めることができる。

・「○○について××が書かれている。」のように，具体的な内容を加えること。

・「○○と△△が書かれている。(3 点)」「○○が書かれている。(2 点)」「△△が書かれている。(1 点)」のように，段階を設け，段階ごとの点数を設定すること。

・「誤字が一つ以上ある。(1 点減点)」のように，部分点の基準を加えること。

数-18-公-東京-KS-01

1　問１　$5-\frac{1}{3}\times(-9)=5+3=8$

問２　$8(a+b)-(4a-b)=8a+8b-4a+b=4a+9b$

問３　$(\sqrt{7}+2\sqrt{3})(\sqrt{7}-2\sqrt{3})=(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{3})^2=7-12=-5$

問４　$4x-5=x-6$　$4x-x=-6+5$　$3x=-1$　$x=-\frac{1}{3}$

問５　$7x-y=8$…①，$-9x+4y=6$…②とする。①×4＋②より，$28x-9x=32+6$　$19x=38$　$x=2$…③
①に③を代入して，$7\times2-y=8$　$y=6$

問６　$x^2+12x+35=0$　$(x+7)(x+5)=0$　$x=-7$，-5

問７　最高気温が 18℃以上である日は，18℃以上 20℃未満の階級，20℃以上 22℃未満の階級，22℃以上 24℃未満の階級の３つの階級のいずれかに含まれるので，その日数は，5＋9＋4＝18(日)
よって，求める割合は，18÷40＝0.45 だから，45％

問８　$\angle x$ の頂点を通り，直線ℓに平行な直線をひくと，平行線の同位角・錯角は等しいから，
$\angle x=(180^\circ-135^\circ)+70^\circ=45^\circ+70^\circ=115^\circ$

問９　線分 PQ の垂直二等分線が直線ℓとなる。

数-18-公-東京-KS-02

2　問１　正六角形の A，B，C，D，E，F は，点 M と点 A，B，C，D，E，F をそれぞれ結ぶと，6 つの合同な正三角形に分けることができる。よって，底面積は，$\left(\frac{1}{2}\times a\times b\right)\times6=3ab(\text{cm}^2)$　四角形 AGHB の面積は，$h\times a=ah(\text{cm}^2)$だから，側面積は，$ah\times6=6ah(\text{cm}^2)$　したがって，表面積 Pcm² は，
$P=3ab\times2+6ah=6ab+6ah=6a(b+h)$と表される。よって，［　　］に当てはまる式は，$b+h$

問２　円柱の側面は，縦の長さが $h$cm，横の長さが底面の円周の長さに等しい長方形だから，
側面積は $2\pi r\times h=2\pi rh(\text{cm}^2)$であり，底面積は $\pi r^2\text{cm}^2$ である。
よって，表面積 Qcm² は，$Q=2\pi rh+\pi r^2\times2=2\pi rh+2\pi r^2$…(1)
ここで，$\ell=2\pi r$ だから，$\ell(h+r)=2\pi r(h+r)=2\pi rh+2\pi r^2$…(2)
(1)，(2)より，$Q=\ell(h+r)$

数-18-公-東京-KS-03

3　問１　a のとる値の範囲が$-4\leqq a\leqq6$ だから，$a=0$ のとき $b=\frac{1}{2}\times0^2=0$，$a=6$ のとき $b=\frac{1}{2}\times6^2=18$
よって，$0\leqq b\leqq18$

問２　(1) 点 P が y 軸上にあることと，曲線ℓ上の点であることから，このとき点 P は原点 O と一致しており，P(0，0)であり，点 Q は直線 AB と y 軸との交点である。
2 点 A，B はともに曲線ℓ上の点で，x 座標はそれぞれ-4，6 だから，A(−4，8)，B(6，18)
よって，直線 AB の傾きは，$\frac{18-8}{6-(-4)}=1$　直線 AB の式を $y=x+c$ として $x=6$，$y=18$ を代入すると，$18=6+c$　$c=12$　よって，Q(0，12)
点 M は線分 PQ の中点だから，PM＝PQ÷2＝12÷2＝6 より，M(0，6)
したがって，2 点 B，M を通る直線の式を $y=kx+6$ として $x=6$，$y=18$ を代入すると，
$18=6k+6$　$k=2$　だから，求める直線の式は，$y=2x+6$

(2) 点 P の x 座標を p とすると，$\mathrm{P}\left(p,\ \frac{1}{2}p^2\right)$，Q$(p,\ p+12)$

点 M は線分 PQ の中点だから，$\mathrm{PM}=\mathrm{PQ}\div 2=\left\{(p+12)-\frac{1}{2}p^2\right\}\div 2=-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+6$

よって，点 M の y 座標は，$\frac{1}{2}p^2+\left(-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+6\right)=\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+6$ だから，$\mathrm{M}\left(p,\ \frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+6\right)$

ここで，直線 OB は原点を通る直線なので， B(6，18)より，その式は $y=3x$

したがって，$y=3x$ に $x=p$，$y=\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+6$ を代入して，

$\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+6=3p$　$p^2-10p+24=0$　$(p-4)(p-6)=0$　$p=4$，6

点 P の x 座標は-4 より大きく 6 より小さい数なので，$p=4$ は問題に合うが，$p=6$ は問題に合わない。よって，P(4，8)

数-18-公-東京-KS-04

4　**問１**　点 B と点 C を結ぶと$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$より，AC＝BC であり，半円の弧に対する円周角は直角だから，∠ACB＝90°で，△ACB は直角二等辺三角形なので，∠BAC＝45°

よって，△ACQ において，三角形の内角・外角の性質より，∠AQP＝a°＋45°

問２　(1) △ABP と△ARP において，

仮定から，BP＝RP…(1)

半円の弧に対する円周角は直角だから，∠APB＝90°…(2)

(2)より，AP⊥BR だから，∠APB＝∠APR…(3)

共通な辺だから，AP=AP…(4)

(1)，(3)，(4)より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△ABP≡△ARP

(2) △ACQ と△OBP において，

円周角の大きさは対応する弧の長さに比例するから，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=2\overset{\frown}{\mathrm{BP}}$より，∠BAC＝2∠BAP…(5)

同じ弧に対する中心角の大きさは円周角の大きさの 2 倍だから，∠BOP＝2∠BAP…(6)

(5)，(6)より，∠BAC＝∠BOP…(7)

$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$に対する円周角だから，∠ACQ＝∠OBP…(8)

(7)，(8)より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△ACQ∽△OBP

ここで，∠CAO＝45°だから，△OAC は∠AOC＝90°の直角二等辺三角形であり，OA : AC＝1 : $\sqrt{2}$

よって，OB : AC＝1 : $\sqrt{2}$ だから，△ACQ : △OBP＝1^2 : $(\sqrt{2}\ )^2$＝1 : 2 となり，△ACQ＝2△OBP

さらに，OA＝OB より，△AOP＝△OBP

△ABP≡△ARP より，△ARP＝△ABP＝2△OBP だから，

四角形 AOPR の面積は，△ARP＋△AOP＝3△OBP

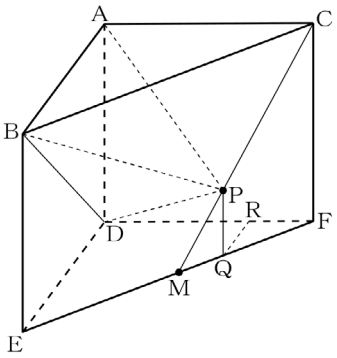
したがって，△ACQ の面積は四角形 AOPR の面積の$\frac{2}{3}$倍

数-18-公-東京-KS-05

5　**問１**　頂点 B と頂点 D を結ぶ。点 P が頂点 C に一致するとき，△ADP，△ABC，△ABD は合同な直角二等辺三角形となるので，BC＝BD＝DP であるから，△BDP は正三角形である。

よって，∠BPD＝60°

問２　右の図のように，点 P を通り面 ABED と平行な面を考え，その面と辺 EF との交点を Q，辺 DF との交点を R とする。



このとき，PQ // CF だから，三角形と比の定理より，

FQ : QM＝CP : PM＝2 : 1

△DEF は DE＝DF＝9cm の直角二等辺三角形だから，

EF＝$9\sqrt{2}$ cm であり，MF＝$\frac{9}{2}\sqrt{2}$ cm だから，

FQ＝$\frac{9}{2}\sqrt{2}$ ×$\frac{2}{1+2}$＝$3\sqrt{2}$ (cm)

△FRQ は∠FRQ＝90°の直角二等辺三角形だから，

FR＝$3\sqrt{2}$ ×$\frac{1}{\sqrt{2}}$＝3(cm)

よって，DR＝9－3＝6(cm)

立体 P－ABD は，△ABD を底面としたときの高さが DR＝6cm の三角錐だから，求める体積は，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times9\times9\right)\times6=81(\text{cm}^2)$