Ｒ２　東京都　公立　数学　問題

数-20-公-東京-問-01

1　次の各問に答えよ。

問１　$9-8\div\frac{1}{2}$　を計算せよ。

問２　$3(5a-b)-(7a-4b)$　を計算せよ。

問３　$(2-\sqrt{6})(1+\sqrt{6})$　を計算せよ。

問４　一次方程式　$9x+4=5(x+8)$　を解け。

問５　連立方程式　$\begin{cases}7x-3y=6\\x+y=8\end{cases}$　を解け。

問６　二次方程式　$3x^2+9x+5=0$　を解け。

問７　次の［　　］の中の「**あ**」「**い**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の表は，ある中学校の生徒 40 人について，自宅から A 駅まで歩いたときにかかる時間を調査し，度数分布表に整理したものである。

自宅から A 駅まで歩いたときにかかる時間が 15 分未満である人数は，全体の人数の［**あい**］％である。

階級（分）			度数（人）
以上		未満	
5	～	10	12
10	～	15	14
15	～	20	10
20	～	25	3
25	～	30	1
計			40

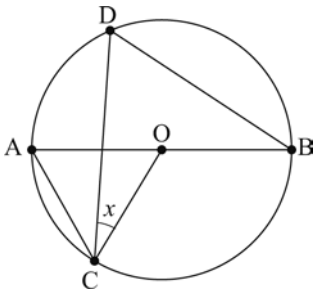
問８　次の［　　］の中の「**う**」「**え**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の**図１**で，点 O は線分 AB を直径とする円の中心であり，2 点 C，D は円 O の周上にある点である。

4 点 A，B，C，D は，**図１**のように，A，C，B，D の順に並んでおり，互いに一致しない。

点 O と点 C，点 A と点 C，点 B と点 D，点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。

図１



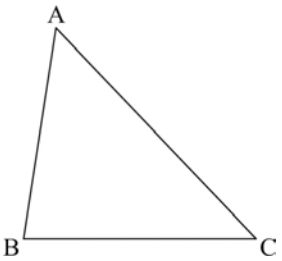
∠AOC＝∠BDC，∠ABD＝34 °のとき，x で示した∠OCD の大きさは，［**うえ**］度である。

問９　右の**図２**で，△ABC は，鋭角三角形である。

解答欄に示した図をもとにして，辺 AC 上にあり，AP＝BP となる点 P を，定規とコンパスを用いて作図によって求め，点 P の位置を示す文字 P も書け。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図２



2 S さんのクラスでは，先生が示した問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

［先生が示した問題］

a，b，h を正の数とし，$a>b$ とする。

右の**図１**は，点 O，点 P をそれぞれ底面となる円の中心とし，2 つの円の半径がともに a cm であり，四角形 ABCD は AB＝h cm の長方形で，四角形 ABCD が側面となる円柱の展開図である。

図１

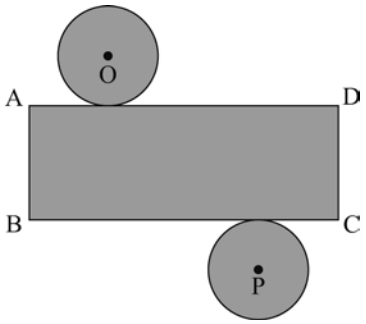
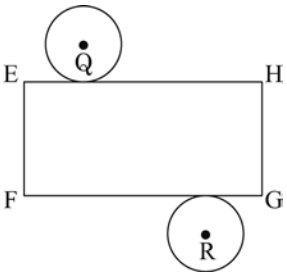


図２



右の**図２**は，点 Q，点 R をそれぞれ底面となる円の中心とし，2 つの円の半径がともに b cm であり，四角形 EFGH は EF＝h cm の長方形で，四角形 EFGH が側面となる円柱の展開図である。

図１を組み立ててできる円柱の体積を X cm^3，**図２**を組み立ててできる円柱の体積を Y cm^3 とするとき，X－Y の値を a，b，h を用いて表しなさい。

問１　［先生が示した問題］で，X－Y の値を a，b，h を用いて，X－Y＝ ☐ と表すとき，☐ に当てはまる式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。
ただし，円周率はπとする。

ア　$\pi(a^2-b^2)h$　　**イ**　$\pi(a-b)^2h$　　**ウ**　$2\pi(a-b)h$　　**エ**　$\pi(a-b)h$

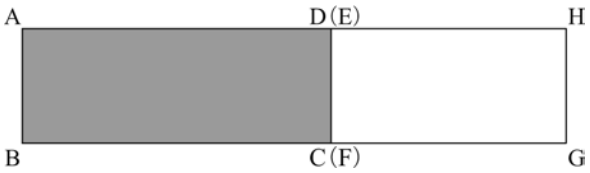
S さんのグループは，［先生が示した問題］で示された 2 つの展開図をもとにしてできる長方形が側面となる円柱を考え，その円柱の体積と，X と Y の和との関係について次の問題を作った。

［S さんのグループが作った問題］

a，b，h を正の数とし，$a>b$ とする。

右の**図３**で，四角形 ABGH は，**図１**の四角形 ABCD の辺 DC と**図２**の四角形 EFGH の辺 EF を一致させ，辺 AH の長さが辺 AD の長さと辺 EH の長さの和となる長方形である。

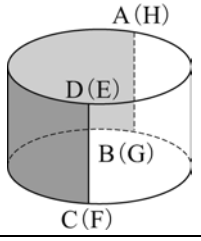
図３



右の**図４**のように，**図３**の四角形 ABGH が円柱の側面となるように辺 AB と辺 HG を一致させ，組み立ててできる円柱を考える。

［先生が示した問題］の 2 つの円柱の体積 X と Y の和を W cm^3，**図４**の円柱の体積を Z cm^3 とするとき，Z－W＝$2\pi abh$ となることを確かめてみよう。

図４



問２　［S さんのグループが作った問題］で，Z－W＝$2\pi abh$ となることを証明せよ。
ただし，円周率はπとする。

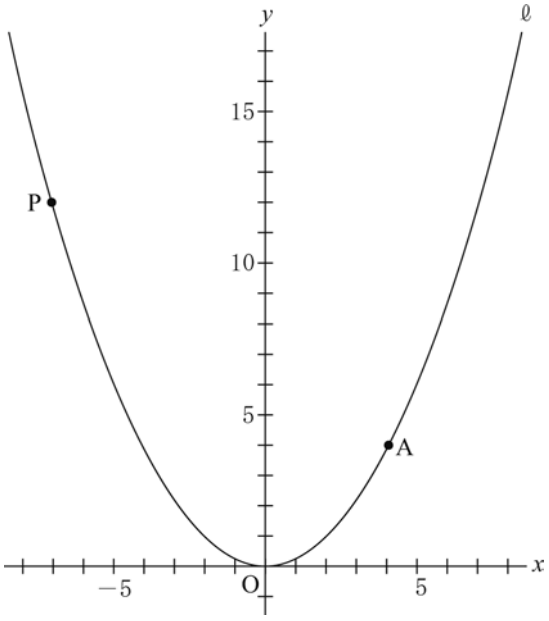
3 右の**図１**で，点Oは原点，曲線ℓは関数$y=\frac{1}{4}x^2$のグラフを表している。

点Aは曲線ℓ上にあり，x座標は4である。

曲線ℓ上にある点をPとする。

次の各問に答えよ。

図１



問１ 次の ① と ② に当てはまる数を，下の**ア**～**ク**のうちからそれぞれ選び，記号で答えよ。

点Pのx座標をa，y座標をbとする。

aのとる値の範囲が$-8 \leqq a \leqq 2$のとき，bのとる値の範囲は，

① $\leqq b \leqq$ ②

である。

ア -64　　**イ** -2　　**ウ** 0　　**エ** $\frac{1}{2}$

オ 1　　**カ** 4　　**キ** 16　　**ク** 64

問２ 次の ③ と ④ に当てはまる数を，下の**ア**～**エ**のうちからそれぞれ選び，記号で答えよ。

点Pのx座標が-6のとき，2点A，Pを通る直線の式は，

$y=$ ③ $x+$ ④

である。

③　**ア** $-\frac{5}{2}$　　**イ** -2　　**ウ** $-\frac{13}{10}$　　**エ** $-\frac{1}{2}$

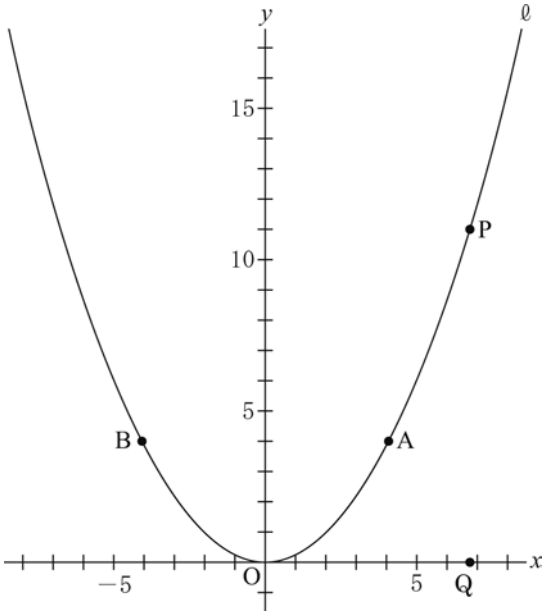
④　**ア** 12　　**イ** 6　　**ウ** 4　　**エ** 2

問３　右の**図２**は，**図１**において，点 P の x 座標が 4 より大きい数であるとき，y 軸を対称の軸として点 A と線対称な点を B，x 軸上にあり，x 座標が点 P の x 座標と等しい点を Q とした場合を表している。

点 O と点 A，点 O と点 B，点 A と点 P，点 A と点 Q，点 B と点 P をそれぞれ結んだ場合を考える。

四角形 OAPB の面積が△AOQ の面積の 4 倍となるとき，点 P の x 座標を求めよ。

図２



数-20-公-東京-問-04

4　右の**図１**で，四角形 ABCD は正方形である。

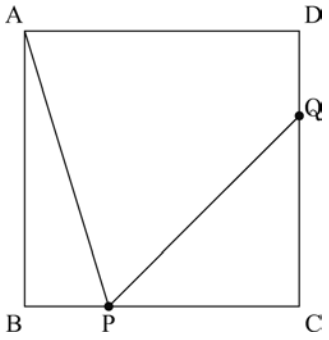
点 P は辺 BC 上にある点で，頂点 B，頂点 C のいずれにも一致しない。

点 Q は辺 CD 上にある点で，CP＝CQ である。

頂点 A と点 P，点 P と点 Q をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

図１



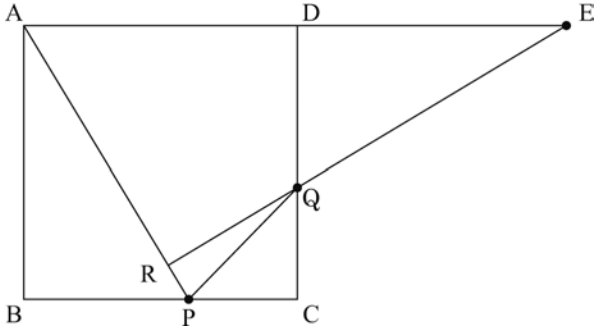
問１　**図１**において，∠BAP＝a °とするとき，∠APQ の大きさを表す式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア　$(90-a)$ 度　　**イ**　$(45-a)$ 度　　**ウ**　$(a+45)$ 度　　**エ**　$(a+60)$ 度

問２　右の**図２**は，**図１**において，辺 AD を D の方向に延ばした直線上にあり AD＝DE となる点を E，点 E と点 Q を結んだ線分 EQ を Q の方向に延ばした直線と線分 AP との交点を R とした場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

図２



(1) △ABP≡△EDQ であることを証明せよ。

(2) 次の［　　］の中の「**お**」「**か**」「**き**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図２において，AB＝4 cm，BP＝3 cm のとき，線分 EQ の長さと線分 QR の長さの比を最も簡単な整数の比で表すと，EQ：QR＝［**おか**］：［**き**］である。

数-20-公-東京-問-05

5　右の**図１**に示した立体 ABCD－EFGH は，AB＝6 cm，AD＝8 cm，AE＝12 cm の直方体である。

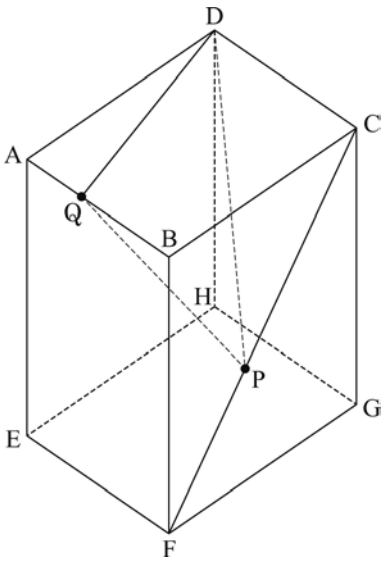
頂点 C と頂点 F を結び，線分 CF 上にある点を P とする。

辺 AB 上にあり，頂点 B に一致しない点を Q とする。

頂点 D と点 P，頂点 D と点 Q，点 P と点 Q をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

図１



問１　次の［　　］の中の「**く**」「**け**」「**こ**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

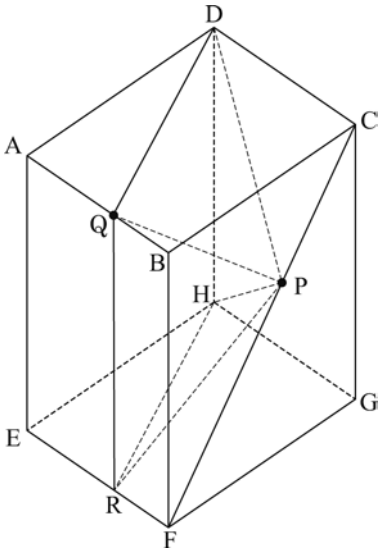
点 P が頂点 F と，点 Q が頂点 A とそれぞれ一致するとき，△DQP の面積は，［**くけ**］$\sqrt{\text{［こ］}}$ cm^2 である。

問２　次の［　　］の中の「さ」「し」「す」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

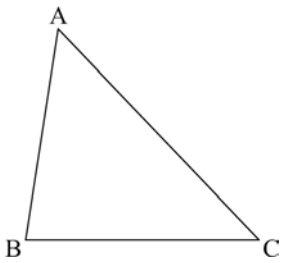
右の**図２**は，**図１**において，点 Q を通り辺 AE に平行な直線を引き，辺 EF との交点を R とし，頂点 H と点 P，頂点 H と点 R，点 P と点 R をそれぞれ結んだ場合を表している。

AQ＝4 cm，CP：PF＝3：5 のとき，立体 P－DQRH の体積は，［さしす］ cm^3 である。

図２



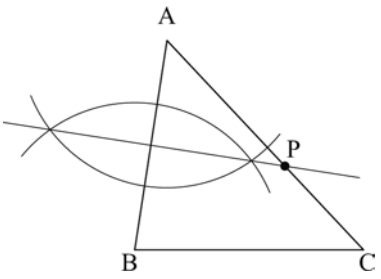
Ｒ２　東京都　公立　数学　解答用紙

	問題番号		解答			配点	備考
数-20-公-東京-KY-01	1	問１					
		問２					
		問３					
		問４					
		問５	$x=$　　，$y=$				
		問６					
		問７	あい	あ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				い	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問８	うえ	う	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
				え	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問９					

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-20-公-東京-KY-02	2	問１	㋐　㋑　㋒　㋓			
		問２	〔証　明〕 $Z-W=2\pi abh$			
数-20-公-東京-KY-03	3	問１	①	㋐　㋑　㋒　㋓　㋔　㋕　㋖　㋗		
			②	㋐　㋑　㋒　㋓　㋔　㋕　㋖　㋗		
		問２	③	㋐　㋑　㋒　㋓		
			④	㋐　㋑　㋒　㋓		
		問３				

	問題番号		解答				配点	備考
数-20-公-東京-KY-04	4	問1	㋐ ㋑ ㋒ ㋓					
		問2	(1)	〔証　明〕 △ABP と△EDQ において, △ABP≡△EDQ				
			(2)	おか:き	お	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
					か	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
					き	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
数-20-公-東京-KY-05	5	問1	$\boxed{くけ}\sqrt{\boxed{こ}}$		く	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
					け	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
					こ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問2	さしす		さ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
					し	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
					す	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		

数学　解答

	問題番号		解答			配点	備考
数-20-公-東京-01	1	問１	-7			5	
		問２	$8a+b$			5	
		問３	$-4+\sqrt{6}$			5	
		問４	9			5	
		問５	$x=3,\ y=5$			5	
		問６	$\dfrac{-9\pm\sqrt{21}}{6}$			5	
		問７	あい	あ	6	5	
				い	5		
		問８	うえ	う	2	5	
				え	6		
		問９				6	採点のポイント ○辺 AB の垂直二等分線を引き，辺AC上にAP＝BPとなる点Pが正確に示されている。

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-東京-ネ-02	2	問１	ア	5	
		問２	〔証　明〕 四角形 ABGH において， AD＝2πa，EH＝2πb より， AH＝AD＋EH ＝2πa＋2πb ＝2π(a＋b)　…… (1) (1) は，四角形 ABGH が側面となる円柱の底面の円周と等しいことから，底面の円の半径は，(a＋b)cm と表すことができる。 よって，Z ＝π(a＋b)^2h　…… (2) 一方，　W＝X＋Y ＝πa^2h＋πb^2h　…… (3) (2)，(3)より， Z－W ＝π(a＋b)^2h－(πa^2h＋πb^2h) ＝π(a^2＋2ab＋b^2)h－πa^2h－πb^2h ＝πa^2h＋2πabh＋πb^2h－πa^2h－πb^2h ＝2πabh したがって， Z－W＝2πabh	7	採点のポイント ○辺 AH の長さが文字を用いた式で適切に表され，底面の円の半径が(a＋b)cm であることが示されている。 ○式の変形ができ，適切に処理されている。 ○立体の体積について，Z－W＝2πabh が成り立つことが的確に示されている。
数-20-公-東京-ネ-03	3	問１	① ウ	5	全て「正答」で，点を与える。
			② キ		
		問２	③ エ	5	全て「正答」で，点を与える。
			④ イ		
		問３	8	5	

	問題番号		解　　答				配点	備　　考
数-20-公-東京-木-04	4	問１	ウ				5	
		問２	(1)	〔証　明〕 △ABP と△EDQ において， 仮定から，∠ABP＝∠ADQ＝90° また，∠EDQ は∠ADQ の外角で 90° だから， ∠ABP＝∠EDQ＝90°　…… (1) 仮定から，AB＝AD AD＝ED よって，　AB＝ED　　…… (2) また，BP＝CB－CP DQ＝CD－CQ 仮定から，CB＝CD，CP＝CQ より， BP＝DQ　　…… (3) (1)，(2)，(3)より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから， △ABP≡△EDQ			7	採点のポイント ○正しいと認められる事柄について，根拠を明確に記述し，仮定から結論を導く推論の過程が的確に示されている。
			(2)	おか：き	お	2	5	
					か	5		
					き	7		
数-20-公-東京-木-05	5	問１	$\sqrt{\text{くけ}\text{こ}}$		く	2	5	
					け	4		
					こ	5		
		問２	さしす		さ	1	5	
					し	4		
					す	4		

各学校において，採点のポイントを踏まえて『部分点の基準』を作成し，『部分点の基準ごとの点数』を定めること。

なお，受検者の実態等に応じて，次の例のように詳細な基準を定めることができる。

・「○○について××が書かれている。」のように，具体的な内容を加えること。

・「○○と△△が書かれている。(3 点)」「○○が書かれている。(2 点)」「△△が書かれている。(1 点)」のように，段階を設け，段階ごとの点数を設定すること。

・「誤字が一つ以上ある。(1 点減点)」のように，部分点の基準を加えること。

数-20-公-東京-KS-01

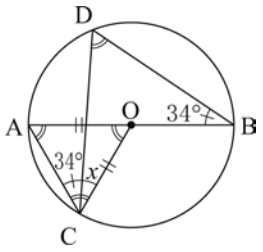
1　【小問集合】

〈東京都大問１の傾向〉

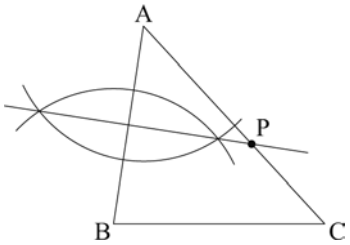
①　「正負の数」・「式の計算」・「平方根」・「方程式」・「資料の整理」・「円周角」・「作図」など。

②　計算から作図まで幅広く基本事項を扱う小問集合。

問８　線分 OA，OC は円 O の半径だから，OA＝OC より，
△OAC は二等辺三角形で，∠OAC＝∠OCA
また，∠AOC＝∠BDC で，同じ弧に対する円周角は等しいので，
∠BAC＝∠BDC
だから，∠OAC＝∠AOC
したがって，△OAC は正三角形で，∠OCA＝60 °
同じ弧に対する円周角は等しいので，∠ACD＝∠ABD＝34 ° だから，
$\angle x$＝∠OCA－∠ACD＝60 °－34 °＝26 °



問９　線分の両端の点から等しい距離にある点は，その線分の垂直二等分線上にある。したがって，線分 AB の垂直二等分線と，辺 AC の交点を求めればよい。



数-20-公-東京-KS-02

2　【式の利用，円柱の体積】

問１　底面の半径 a cm，高さ h cm の円柱の体積だから，$X=\pi a^2h$
底面の半径 b cm，高さ h cm の円柱の体積だから，$Y=\pi b^2h$
したがって，$X-Y=\pi a^2h-\pi b^2h=\pi(a^2-b^2)h$

問２　円柱の側面となる長方形の底面に接する辺の長さと，底面となる円の円周が等しいことに着目し，**図３**，**図４**の円柱の底面となる円の半径を a，b を用いて表すと，$(a+b)$cm となる。よって，$Z=\pi(a+b)^2h$ となることから考える。

図３

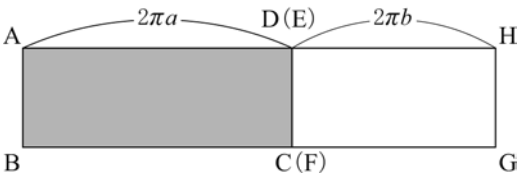
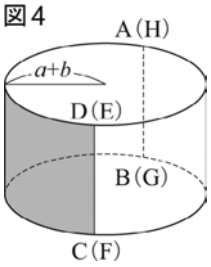


図４

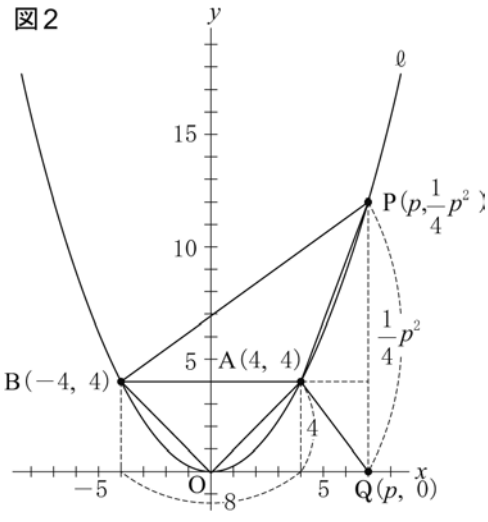


数-20-公-東京-KS-03

3 【関数 $y=ax^2$ のグラフ】

問３　点 P の x 座標を p とすると，点 P，Q の座標は，
$\mathrm{P}\left(p,\ \frac{1}{4}p^2\right)$，Q（$p$，0）と表すことができる。
また，点 B は A（4，4）の x 座標の符号を逆にした点だから，B（−4，4）
四角形 OAPB は，AB を底辺とする 2 つの三角形△ABO と△ABP に分けることができ，AB の長さは，AB＝4−(−4)＝8 だから，
△ABO の面積は，$8\times4\times\frac{1}{2}=16$
△ABP の面積は，$8\times\left(\frac{1}{4}p^2-4\right)\times\frac{1}{2}=p^2-16$
したがって，四角形 OAPB の面積は，
$16+(p^2-16)=p^2$
△AOQ は底辺 p，高さ 4 の三角形だから，面積は，
$p\times4\times\frac{1}{2}=2p$
四角形 OAPB の面積は△AOQ の面積の 4 倍だから，
$p^2=4\times2p$ より，$p=0$，8
問題の条件より，$p>4$ だから，$p=8$ があてはまる。

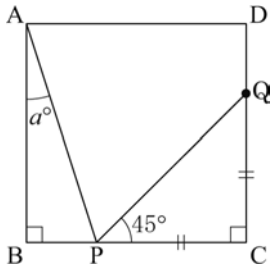
図2



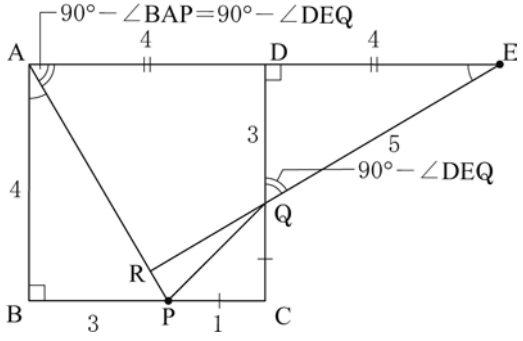
数-20-公-東京-KS-04

4 【平面図形】

問１　∠APQ は∠APC から∠QPC を引いて求められる。
△ABP の外角だから，∠APC＝∠BAP＋∠ABP＝a °＋90 °
CP＝CQ，∠PCQ＝90 ° より，△PCQ は直角二等辺三角形だから，
∠QPC＝45 °
∠APQ＝∠APC−∠QPC＝a °＋90 °−45 °＝a °＋45 °



問２　(2) △EDQ において，△ABP≡△EDQ より ED＝AB＝4cm，
DQ＝BP＝3cm，∠EDQ＝90 ° だから，三平方の定理より，
$\mathrm{EQ}^2=\mathrm{ED}^2+\mathrm{DQ}^2=4^2+3^2=25$　よって，EQ＝5cm
また，△ABP≡△EDQ より
∠BAP＝∠DEQ だから，
∠EAR＝∠BAD−∠BAP＝90°−∠DEQ,
∠EQD＝180°−∠EDQ−∠DEQ
＝90°−∠DEQ より，∠EAR＝∠EQD
さらに，∠E は共通だから
∠REA＝∠DEQ なので，△ERA∽△EDQ
相似比は EA：EQ＝8：5 だから，
$\mathrm{ER}=\mathrm{ED}\times\frac{8}{5}=4\times\frac{8}{5}=\frac{32}{5}$(cm)より，
$\mathrm{QR}=\mathrm{ER}-\mathrm{EQ}=\frac{32}{5}-5=\frac{7}{5}$(cm)
したがって，$\mathrm{EQ}:\mathrm{QR}=5:\frac{7}{5}=25:7$



5 【三平方の定理の空間図形への利用】

問１　点 P と頂点 F，点 Q と頂点 A が一致することから，△DQP は△DAF と等しい。

△AFB において，AB＝6cm，BF＝AE＝12cm，∠ABF＝90°だから，三平方の定理より，

$AF^2=AB^2+BF^2=6^2+12^2=180$　よって，$AF=6\sqrt{5}$cm

△DAF において，∠DAF＝90°，AD＝8cm だから，△DAF の面積は

$AD\times AF\times\frac{1}{2}=8\times6\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=24\sqrt{5}\text{cm}^2$

問２　四角形 DQRH を底面とする四角錐と考えて体積を求める。

図２

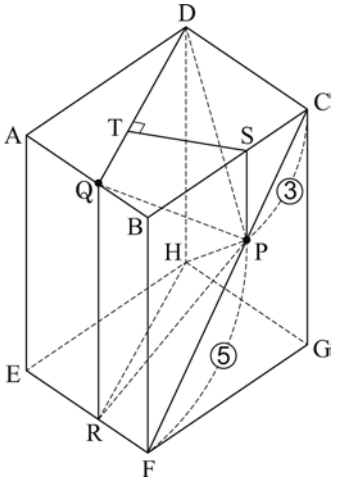


図２の立体に，点 P を通り辺 BF に平行な直線を引き，
辺 BC との交点を S とする。また，点 S から線分 DQ に
垂直な直線を引き，線分 DQ との交点を T とすると，
線分 TS の長さが四角錐の高さとなる。

△CFB において，仮定から CP：PF＝3：5

BF//SP だから，CS：SB＝CP：PF＝3：5

したがって，$CS=CB\times\frac{3}{8}=8\times\frac{3}{8}=3\text{(cm)}$,

SB＝CB－CS＝8－3＝5(cm)

四角形 ABCD において, 辺 CB, 線分 DQ を延長した直線を引き，
2 直線の交点を U とする。

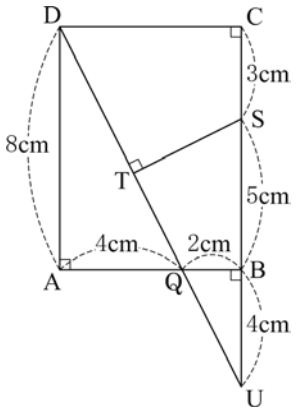
∠DAQ＝∠UBQ＝90°，対頂角だから∠DQA＝∠UQB なので，

△ADQ∽△BUQ

AQ＝4cm，BQ＝AB－AQ＝6－4＝2(cm)だから，相似比は

AQ：BQ＝4：2＝2：1

したがって，$BU=AD\times\frac{1}{2}=8\times\frac{1}{2}=4\text{(cm)}$



△BUQ において，三平方の定理より，

$UQ^2=BU^2+BQ^2=4^2+2^2=20$

$UQ=2\sqrt{5}$cm

また，∠UBQ＝∠UTS＝90°，∠U は共通だから

∠BUQ＝∠TUS なので，

△BUQ∽△TUS

相似比は UQ：US＝$2\sqrt{5}$：9 だから，

$TS=BQ\times\frac{9}{2\sqrt{5}}=2\times\frac{9}{2\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}\text{(cm)}$

△ADQ∽△BUQ より DQ＝UQ×2＝$2\sqrt{5}\times2=4\sqrt{5}$(cm)，QR＝AE＝12cm だから，

四角形 DQRH の面積は，DQ×QR＝$4\sqrt{5}\times12=48\sqrt{5}(\text{cm}^2)$

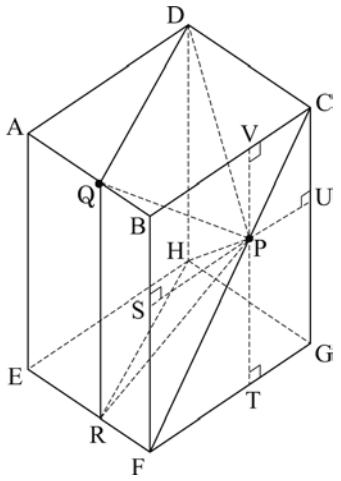
したがって，立体 P－DQRH の体積は，$48\sqrt{5}\times\frac{9\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{3}=144(\text{cm}^3)$

〈別解〉

立体 P－DQRH は直方体 ABCD－EFGH から，三角柱 AQD－ERH，四角錐 P－QRFB，四角錐 P－RFGH，四角錐 P－CGHD，四角錐 P－QBCD を除いたものである。

直方体 ABCD－EFGH の体積は，$8\times6\times12=576(\mathrm{cm}^3)$

三角柱 AQD－ERH の体積は，$\frac{1}{2}\times8\times4\times12=192(\mathrm{cm}^3)$



点 P から辺 BF，FG，GC，CB に引いた垂線と各辺との交点をそれぞれ S，T，U，V とする。

CP：PF＝3：5 より，$PS=8\times\frac{5}{8}=5$，$PT=12\times\frac{5}{8}=\frac{15}{2}$，

$PU=8-PS=3$，$PV=12-PT=\frac{9}{2}$

四角錐 P－QRFB は，長方形 QRFB を底面，線分 PS を高さとする四角錐だから，体積は

$\frac{1}{3}\times QR\times QB\times PS=\frac{1}{3}\times12\times2\times5=40(\mathrm{cm}^3)$

四角錐 P－RFGH は，台形 RFGH を底面，線分 PT を高さとする四角錐だから，体積は

$\frac{1}{3}\times\frac{(RF+HG)\times FG}{2}\times PT=\frac{1}{3}\times\frac{(2+6)\times8}{2}\times\frac{15}{2}=80(\mathrm{cm}^3)$

四角錐 P－CGHD は，長方形 CGHD を底面，線分 PU を高さとする四角錐だから，体積は

$\frac{1}{3}\times CG\times CD\times PU=\frac{1}{3}\times12\times6\times3=72(\mathrm{cm}^3)$

四角錐 P－QBCD は，台形 QBCD を底面，線分 PV を高さとする四角錐だから，体積は

$\frac{1}{3}\times\frac{(QB+DC)\times BC}{2}\times PV=\frac{1}{3}\times\frac{(2+6)\times8}{2}\times\frac{9}{2}=48(\mathrm{cm}^3)$

以上より，立体 P－DQRH の体積は

$576-(192+40+80+72+48)=144(\mathrm{cm}^3)$