Ｒ３　東京都　公立　数学　問題

数-21-公-東京-問-01

1　次の各問に答えよ。

問１　$-3^2\times\frac{1}{9}+8$　を計算せよ。

問２　$\frac{5a-b}{2}-\frac{a-7b}{4}$　を計算せよ。

問３　$3\div\sqrt{6}\times\sqrt{8}$　を計算せよ。

問４　一次方程式　$-4x+2=9(x-7)$　を解け。

問５　連立方程式　$\begin{cases}5x+y=1\\-x+6y=37\end{cases}$　を解け。

問６　二次方程式　$(x+8)^2=2$　を解け。

問７　次の　①　と　②　に当てはまる数を，下の**ア**～**ク**のうちからそれぞれ選び，記号で答えよ。

関数 $y=-3x^2$ について，x の変域が $-4\leqq x\leqq 1$ のときの y の変域は，

①　$\leqq y\leqq$　②

である。

ア　-48	**イ**　-16	**ウ**　-3	**エ**　-1
オ　0	**カ**　3	**キ**　16	**ク**　48

問８　次の［　　］の中の「**あ**」「**い**」「**う**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

1 から 6 までの目の出る大小 1 つずつのさいころを同時に 1 回投げる。

大きいさいころの出た目の数を a，小さいさいころの出た目の数を b とするとき，$a \geqq b$ となる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{いう}}}$ である。

ただし，大小 2 つのさいころはともに，1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

問９　右の図のように，直線ℓ と直線 m，直線 m と直線 n がそれぞれ異なる点で交わっている。



解答欄（かいとうらん）に示した図をもとにして，直線 m よりも上側にあり，直線ℓ，直線 m，直線 n のそれぞれから等しい距離（きょり）にある点 P を，定規とコンパスを用いて作図によって求め，点 P の位置を示す文字 P も書け。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

2 S さんのクラスでは，先生が示した問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

［先生が示した問題］

a を正の数，n を自然数とする。

右の**図１**のように，１辺の長さが $2a$ cm の正方形に，各辺の中点を結んでできた四角形を描いたタイルがある。正方形と描いた四角形で囲まれてできる，▨ で示された部分の面積について考える。

図１のタイルが縦と横に n 枚ずつ正方形になるように，このタイルを並べて敷き詰める。右の**図２**は，$n=2$ の場合を表している。

図１のタイルを縦と横に n 枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形で，▨ で示される部分の面積を $\mathrm{P\ cm^2}$ とする。

また，**図１**のタイルと同じ大きさのタイルを縦と横に n 枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形と同じ大きさの正方形で，各辺の中点を結んでできる四角形を描いた別のタイルを考える。右の**図３**は，$n=2$ の場合を表している。

図１と同様に，正方形と描いた四角形で囲まれてできる部分を ■ で示し，その面積を $\mathrm{Q\ cm^2}$ とする。

$n=5$ のとき，P と Q をそれぞれ a を用いて表しなさい。

図１



図２

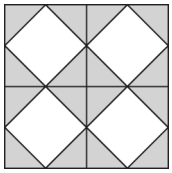
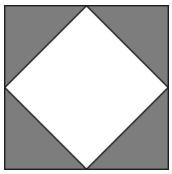


図３



問１　次の ① と ② に当てはまる式を，下の**ア**～**エ**のうちからそれぞれ選び，記号で答えよ。

［先生が示した問題］で，$n=5$ のとき，P と Q をそれぞれ a を用いて表すと，

P＝ ① ，Q＝ ② となる。

① **ア** $\frac{25}{2}a^2$　　**イ** $50a^2$　　**ウ** $75a^2$　　**エ** $100a^2$

② **ア** $\frac{25}{2}a^2$　　**イ** $25a^2$　　**ウ** $50a^2$　　**エ** $75a^2$

S さんのグループは，［先生が示した問題］をもとにして，正方形のタイルの内部に描いた四角形を円に変え，正方形と描いた円で囲まれてできる部分の面積を求める問題を考えた。

［S さんのグループが作った問題］

a を正の数，n を自然数とする。

右の**図４**のように，1 辺の長さが $2a$ cm の正方形に，各辺に接する円を描いたタイルがある。正方形と描いた円で囲まれてできる，▒ で示された部分の面積について考える。

図４



図４のタイルが縦と横に n 枚ずつ正方形になるように，このタイルを並べて敷き詰める。右の**図５**は，$n=2$ の場合を表している。

図５

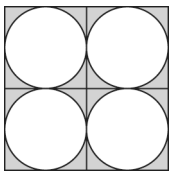


図４のタイルを縦と横に n 枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形で，▒ で示される部分の面積を X cm^2 とする。

また，**図４**のタイルと同じ大きさのタイルを縦と横に n 枚ずつ並べ敷き詰めてできる正方形と同じ大きさの正方形で，各辺に接する円を描いた別のタイルを考える。右の**図６**は，$n=2$ の場合を表している。

図６

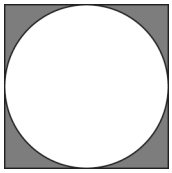


図４と同様に，正方形と描いた円で囲まれてできる部分を ■ で示し，その面積を Y cm^2 とする。

図４のタイルが縦と横に n 枚ずつ並ぶ正方形になるように，このタイルを敷き詰めて，正方形と円で囲まれてできる部分の面積 X，Y をそれぞれ考えるとき，X＝Y となることを確かめてみよう。

問２　［S さんのグループが作った問題］で，X，Y をそれぞれ a，n を用いた式で表し，X＝Y となることを証明せよ。

ただし，円周率は π とする。

数-21-公-東京-問-03

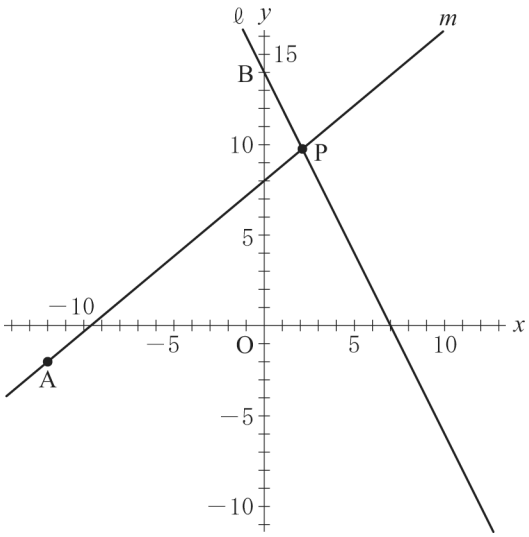
3　右の**図１**で，点 O は原点，点 A の座標は (−12，−2) であり，直線ℓ は一次関数 $y=-2x+14$ のグラフを表している。

直線ℓ と y 軸との交点を B とする。

直線ℓ 上にある点を P とし，2 点 A，P を通る直線を m とする。

次の各問に答えよ。

図１



問１　次の ［　　］ の中の「**え**」に当てはまる数字を答えよ。

点 P の y 座標が 10 のとき，点 P の x 座標は ［ **え** ］ である。

問２　次の ① と ② に当てはまる数を，下の**ア**～**エ**のうちからそれぞれ選び，記号で答えよ。

点 P の x 座標が 4 のとき，直線 m の式は，

$y=$ ① $x+$ ②

である。

① **ア**　$-\frac{1}{2}$　　**イ**　$\frac{1}{2}$　　**ウ**　1　　**エ**　2

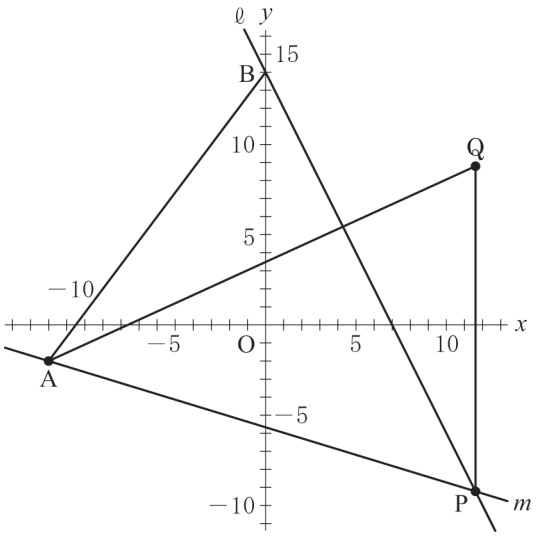
② **ア**　4　　**イ**　5　　**ウ**　8　　**エ**　10

問３　右の**図２**は，**図１**において，

点 P の x 座標が 7 より大きい数であるとき，x 軸を対称（たいしょう）の軸として点 P と線対称な点を Q とし，点 A と点 B，点 A と点 Q，点 P と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。

△APB の面積と△APQ の面積が等しくなるとき，点 P の x 座標を求めよ。

図２



数-21-公-東京-問-04

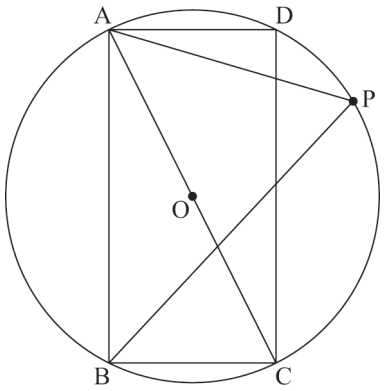
4　右の**図１**で，四角形 ABCD は，AB＞AD の長方形であり，点 O は線分 AC を直径とする円の中心である。

点 P は，頂点 A を含（ふく）まない$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$上にある点で，頂点 C，頂点 D のいずれにも一致（いっち）しない。

頂点 A と点 P，頂点 B と点 P をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

図１



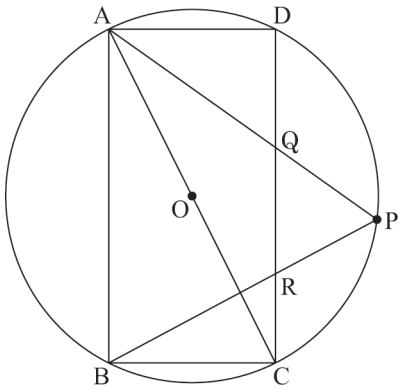
問１　**図１**において，∠ABP＝a° とするとき，∠PAC の大きさを表す式を，次の**ア**～**エ**のうちから選び，記号で答えよ。

ア　$(45-\frac{1}{2}a)$ 度　　**イ**　$(90-a)$ 度　　**ウ**　$(90-\frac{1}{2}a)$ 度　　**エ**　$(135-2a)$ 度

問２　右の**図２**は，**図１**において，辺 CD と線分 AP との交点を Q，辺 CD と線分 BP との交点を R とし，AB＝AP の場合を表している。

次の(1)，(2)に答えよ。

図２



(1) △QRP は二等辺三角形であることを証明せよ。

(2) 次の［　　］の中の「**お**」「**か**」「**き**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図２において，頂点 C と点 P を結んだ場合を考える。

AB＝16 cm，AD＝8 cm のとき，△PRC の面積は，$\frac{\boxed{\text{おか}}}{\boxed{\text{き}}}$ cm^2 である。

数-21-公-東京-問-05

5　右の**図１**に示した立体 ABC－DEF は，

AB＝4 cm，AC＝3 cm，BC＝5 cm，AD＝6 cm，

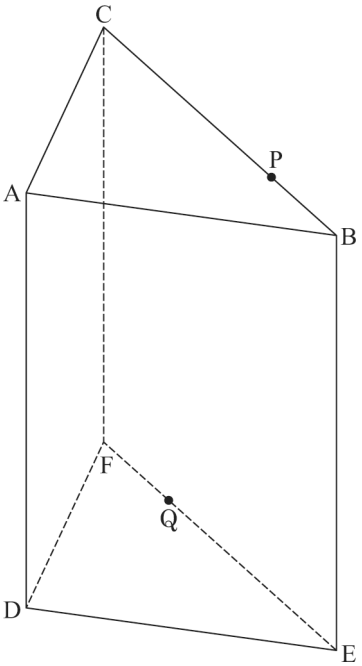
∠BAC＝∠BAD＝∠CAD＝90° の三角柱である。

辺 BC 上にあり，頂点 B に一致（いっち）しない点を P とする。

点 Q は，辺 EF 上にある点で，BP＝FQ である。

次の各問に答えよ。

図１



問１　次の［　　］の中の「**く**」に当てはまる数字を答えよ。

BP＝2 cm のとき，

点 P と点 Q を結んでできる直線 PQ とねじれの位置にある辺は全部で［**く**］本である。

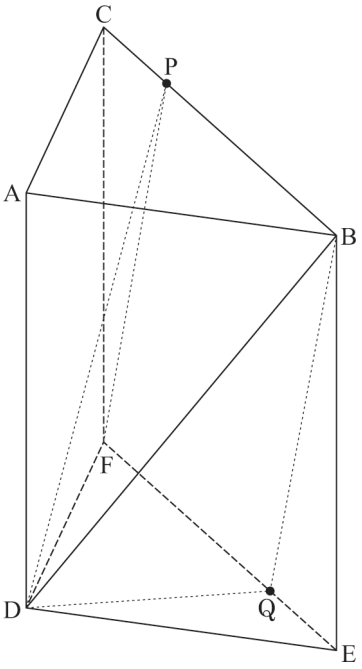
問２　次の［　　］の中の「**け**」「**こ**」「**さ**」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の**図２**は，**図１**において，頂点 B と頂点 D，頂点 B と点 Q，頂点 D と点 P，頂点 D と点 Q，頂点 F と点 P をそれぞれ結んだ場合を表している。

BP＝4 cm のとき，

立体 D－BPFQ の体積は，$\dfrac{\boxed{\text{けこ}}}{\boxed{\text{さ}}}$ cm^3 である。

図２

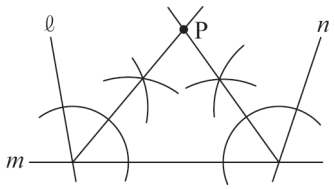


Ｒ３　東京都　公立　数学　解答用紙

	問題番号		解答	配点	備考
数-21-公-東京-KY-01	1	問１			
		問２			
		問３			
		問４			
		問５	$x=$　　，$y=$		
		問６			
		問７	① ㋐ ㋑ ㋒ ㋓ ㋔ ㋕ ㋖ ㋗		
			② ㋐ ㋑ ㋒ ㋓ ㋔ ㋕ ㋖ ㋗		
		問８	あ / いう　あ　⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
			い ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
			う ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問９			

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-21-公-東京-KY-02	2	問１	①	㋐　㋑　㋒　㋓		
			②	㋐　㋑　㋒　㋓		
		問２	〔証　明〕 X＝Y			
数-21-公-東京-KY-03	3	問１	え	え　⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨		
		問２	①	㋐　㋑　㋒　㋓		
			②	㋐　㋑　㋒　㋓		
		問３				

	問題番号		解　　答			配点	備　　考
数-21-公-東京-KY-04	4	問１	㋐　㋑　㋒　㋓				
		問２	(1)	〔証　明〕 △QRP は二等辺三角形である。			
			(2)	おか / き	お	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	
					か	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	
					き	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	
数-21-公-東京-KY-05	5	問１	く		く	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	
		問２	けこ / さ		け	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	
					こ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	
					さ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	

	問題番号		解答	配点	備考
数-21-公-東京-その1	1	問１	7	5	
		問２	$\frac{9a+5b}{4}$	5	
		問３	$2\sqrt{3}$	5	
		問４	5	5	
		問５	$(x=)\ -1,\ (y=)\ 6$	5	
		問６	$-8\pm\sqrt{2}$	5	
		問７	① ア	5	全て「正答」で，点を与える。
			② オ		
		問８	あ / いう　あ　7	5	
			い　1		
			う　2		
		問９		6	

	問題番号		解　　答			配点	備　　考
数-21-公-東京-木-02	2	問１	①	イ		5	全て「正答」で，点を与える。
			②	ウ			
		問２	〔証　明〕 1辺の長さが $2a$ cm の正方形の面積は $(2a)^2$ cm^2，この正方形の各辺に接する円の面積は πa^2 cm^2 で，タイルが n^2 枚あるから， $X=\{(2a)^2-\pi a^2\}\times n^2$ $=(4a^2-\pi a^2)\times n^2$ $=(4-\pi)a^2n^2$ …… (1) タイルを縦と横に n 枚ずつ並べてできる正方形と同じ大きさの正方形の1辺の長さは $2an$ cm，この正方形の各辺に接する円の半径は an cm であるから， $Y=(2an)^2-\pi\times(an)^2$ $=4a^2n^2-\pi a^2n^2$ $=(4-\pi)a^2n^2$ …… (2) (1)，(2)より， (X＝Y)			7	
数-21-公-東京-木-03	3	問１	え	え	2	5	
		問２	①	イ		5	全て「正答」で，点を与える。
			②	ア			
		問３	12			5	

	問題番号		解　　答				配点	備　　考
数-21-公-東京-木-04	4	問１	イ				5	
		問２	(1)	〔証　明〕 仮定から，AB＝AP だから， △ABP は二等辺三角形である。 二等辺三角形の底角は等しいから， ∠ABP＝∠APB よって， ∠ABP＝∠QPR　……(1) 四角形 ABCD は長方形だから， AB // DC 平行線の同位角は等しいから， ∠ABP＝∠QRP　……(2) (1)，(2)より ∠QPR＝∠QRP よって，△QRP において， 2 つの角が等しいから， （△QRP は二等辺三角形である。）			7	
			(2)	おか / き	お	4	5	
					か	8		
					き	5		
数-21-公-東京-木-05	5	問１	く		く	5	5	
		問２	けこ / さ		け	9	5	
					こ	6		
					さ	5		

数-21-公-東京-KS-01

1　【小問集合】

問１　$-3^2\times\frac{1}{9}+8=-3\times3\times\frac{1}{9}+8=-1+8=7$

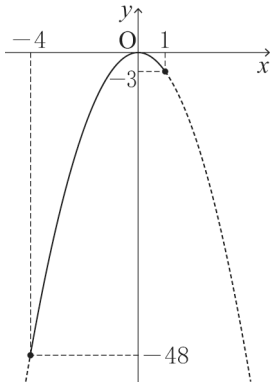
ポイント》累乗の”効力”に注意！

$-\boxed{5^2}=-5\times5=-25$　$\boxed{(-5)^2}=(-5)\times(-5)=25$

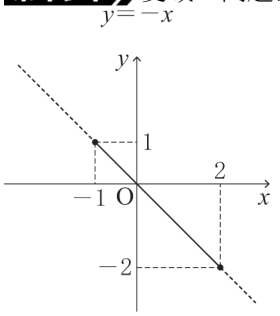
⇒このように，指数がどこまで影響しているかに気を付けて計算しよう！

問３　$3\div\sqrt{6}\times\sqrt{8}=3\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times2\sqrt{2}=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

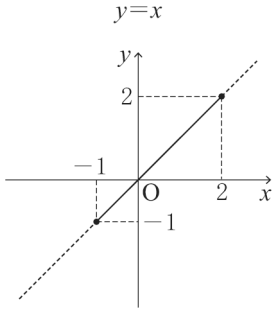
問７　$x=-4$ のとき，$y=-3\times(-4)^2=-48$，$x=1$ のとき，$y=-3\times1^2=-3$ であることに注意して，関数 $y=-3x^2$ のグラフをかくと，**右の図**のようになる。よって，y の変域は，$-48\leqq y\leqq0$



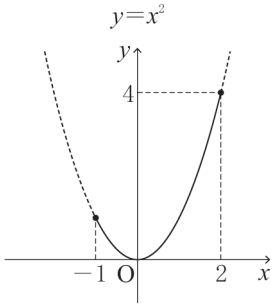
ポイント》変域の問題はグラフで考えよう！



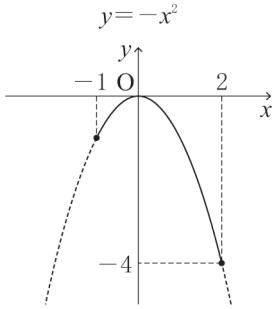
$-2\leqq y\leqq1$



$-1\leqq y\leqq2$



$0\leqq y\leqq4$



$-4\leqq y\leqq0$

特に，関数 $y=ax^2$ の変域を求めるときに注意しよう。

問８　「2 つのさいころを同時に 1 回投げる」ということを行うので，まずは 6×6 の表をかく。起こりうるすべての場合の数は 36 通りで，大きいさいころの出た目の数を a，小さいさいころの出た目の数を b とするとき，「$a\geqq b$ となる」場合の数は 21 通り。

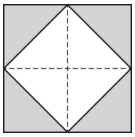
よって，求める確率は，$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	○					
2	○	○				
3	○	○	○			
4	○	○	○	○		
5	○	○	○	○	○	
6	○	○	○	○	○	○

問９　解答のヒント角の二等分線は，その角をなす 2 直線から等距離にある点の集まりであることを利用する。

数-21-公-東京-KS-02

2 【規則性，式の利用】



問１　問題文中の**図１**のタイルの色で塗られた部分の面積は，タイルの面積の半分だから，$(2a)^2\times\frac{1}{2}=2a^2(\text{cm}^2)$

よって，$n=5$ のとき，そのタイルが $5\times5=25$(枚)あるから，

$\text{P}=2a^2\times25=50a^2(\text{cm}^2)$

同様に，問題文中の**図３**のタイルの色で塗られた部分の面積も，タイルの面積の半分だから，

$n=5$ のとき，$\text{Q}=(10a)^2\times\frac{1}{2}=50a^2(\text{cm}^2)$

数-21-公-東京-KS-03

3 【関数のグラフと図形】

問１　点Pは，直線 $\ell: y=-2x+14$ 上にあるので，$y=10$ を代入して，$10=-2x+14$　⇒　$x=2$

問２　**問１**と同様に，$x=4$ を $y=-2x+14$ に代入して，$y=-2\times4+14=6$　⇒　P(4，6)

直線 m は一次関数であり，2点A(−12，−2)，P(4，6)を通るので，$y=ax+b$ にそれぞれの点の座標を代入すると，連立方程式 $\begin{cases}-2=-12a+b\\6=4a+b\end{cases}$ ができる。これを解くと，$a=\frac{1}{2}$，$b=4$

よって，直線 m の式は，$y=\frac{1}{2}x+4$

ポイント》直線の式の求め方

①　$y=ax+b$ とおく。

②　その式に，「a：傾き，変化の割合」「b：切片」「(x,y)：対応する x,y の値の組，グラフが通る点の座標」のうち，2つの条件を見つけて代入する。

問３　△APBと△APQは，底辺APを共有しているので，AP//BQ であれば，面積が等しくなる(**図**)。

点Pの x 座標を t $(t>7)$ とおくと，点Pは，直線 $\ell: y=-2x+14$ 上にあるので，$y=-2t+14$

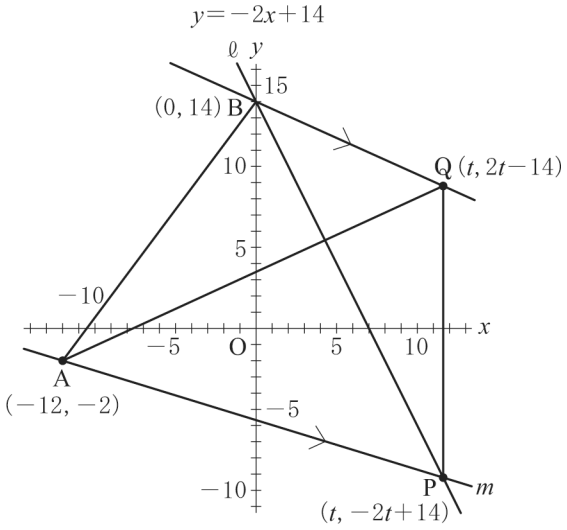
よって，P$(t,\ -2t+14)$

点Qは x 軸を対称の軸として点Pと線対称な点なので，点Pと点Qの x 座標は等しく，y 座標は符号違いとなる。よって，Q$(t,\ 2t-14)$

直線APの傾きは，$\frac{-2t+14-(-2)}{t-(-12)}=\frac{-2t+16}{t+12}$

直線BQの傾きは，$\frac{2t-14-14}{t-0}=\frac{2t-28}{t}$

図



AP//BQ より，直線APと直線BQの傾きが等しいので，$\frac{-2t+16}{t+12}=\frac{2t-28}{t}$

両辺に $t(t+12)$ をかけると，$t(-2t+16)=(t+12)(2t-28)$　⇒　$-2t^2+16t=2t^2-4t-336$

⇒　$-4t^2+20t+336=0$　⇒　$t^2-5t-84=0$　⇒　$(t-12)(t+7)=0$

$t>7$ より，$t=12$

4 【平面図形】

問１

ポイント》図形問題突破のポイント

① 問題文中から，条件となる情報をさがす！

② ①からわかることを発想として広げておく！

③ 問われていることを導き出すのに必要なものを逆算して，②の中から取捨選択する！

④ 前問からの発展の場合は，その結果を使う可能性大！（条件が変わっている可能性もあるので要注意）

解答のヒント

① 問題文から情報をさがすと，長方形，AC を直径とする円 O の 2 つが見つかる。

② 長方形からは，「4 つの内角がすべて 90°」「2 組の対辺がそれぞれ平行→同位角，錯角」「2 組の対辺がそれぞれ等しい」「対角線の長さが等しい」，円 O からは，「円周角の定理」「半径 2 つで二等辺三角形→底角が等しい（**図１**）」「直径→90°（**図２**）」
などが発想として出てくる。

③ 今回は角の大きさを求める問題なので，②の中でも「4 つの内角がすべて 90°」「同位角，錯角」「円周角の定理」「直径→90°」を利用する可能性が高いことがわかる。
以上のことに注目して解いていこう。
$\overset{\frown}{PC}$に対する円周角なので，∠PAC＝∠PBC
また，∠ABP＋∠PBC＝90° なので，a°＋∠PAC＝90° ⇒
∠PAC＝(90－a)°

図１

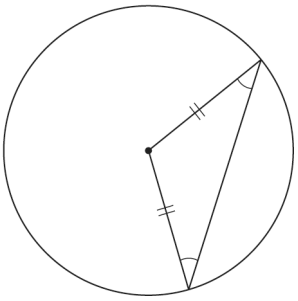
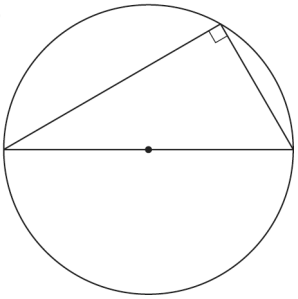


図２



問２ (1)

解答のヒント

① **問１**で見つけた条件に，**問２**で新たに登場した条件 AB＝AP も加えて考えよう。

② **問１**の発想に加えて，AB＝AP から，「△ABP が二等辺三角形である」が発想として出てくる。

③ 今回は，△QRP が二等辺三角形であることの証明なので，「△ABP が二等辺三角形である」ことがポイントになりそう。

(2)

解答のヒント

問１，**問２**で見つけた条件や発想を使おう。今回は，面積を求める問題なので，辺の長さを求めたり，面積比を用いたりする可能性があることから，「4 つの内角がすべて 90°→三平方の定理，相似」や「2 組の対辺がそれぞれ平行→平行線と線分の比」を使う可能性があると考えよう。

△PRC＝△BCP－△BCR であることを利用して面積を求める。

まずは，△BCP の面積を求めよう。

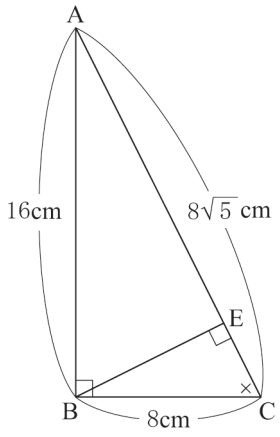
△ABC は∠ABC＝90°の直角三角形なので，三平方の定理より，

$AC^2=AB^2+BC^2=16^2+8^2=320$

AC＞0 より，$AC=8\sqrt{5}$(cm)

△ABC と△BEC において，∠ABC＝∠BEC＝90°，∠ACB＝∠BCE より，2 組の角がそれぞれ等しいので，△ABC∽△BEC（**図３**）

図３



よって，AB：BE＝AC：BC　⇒　16：BE＝$8\sqrt{5}$：8　⇒　16：BE＝$\sqrt{5}$：1　⇒　$\sqrt{5}$BE＝16

⇒　BE＝$\frac{16\sqrt{5}}{5}$(cm)

また，BC：EC＝AC：BC　⇒　8：EC＝$\sqrt{5}$：1　⇒　$\sqrt{5}$EC＝8　⇒　EC＝$\frac{8\sqrt{5}}{5}$(cm)

△ABE と△APE において，AB＝AP，AE＝AE，∠AEB＝∠AEP＝90°より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので，△ABE≡△APE

よって，BE＝PE＝$\frac{16\sqrt{5}}{5}$(cm)　すなわち，BP＝$\frac{16\sqrt{5}}{5}\times 2=\frac{32\sqrt{5}}{5}$(cm)

△BCP＝BP×EC×$\frac{1}{2}=\frac{32\sqrt{5}}{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{128}{5}$(cm^2)

次に，△BCR を求めよう。

△BEC と△BCR において，∠BEC＝∠BCR＝90°，∠EBC＝∠CBR より，2 組の角がそれぞれ等しいので，△BEC∽△BCR(**図 4**)

よって，EC：CR＝BE：BC

⇒　$\frac{8\sqrt{5}}{5}$：CR＝$\frac{16\sqrt{5}}{5}$：8＝$2\sqrt{5}$：5

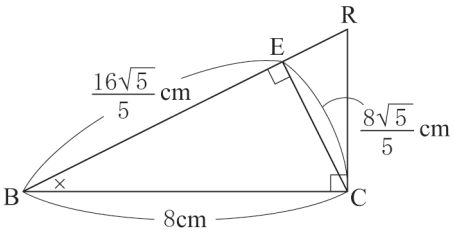
⇒　$2\sqrt{5}$CR＝$8\sqrt{5}$

⇒　CR＝4(cm)

△BCR＝BC×CR×$\frac{1}{2}$＝8×4×$\frac{1}{2}$＝16(cm^2)

よって，△PRC＝△BCP－△BCR＝$\frac{128}{5}-16=\frac{48}{5}$(cm^2)

図 4

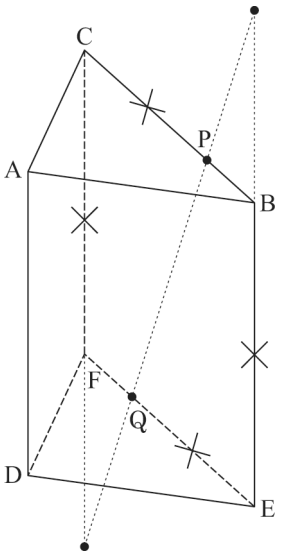


数-21-公-東京-KS-05

5　【空間図形】

問 1　交わらず，かつ平行でないというのが，ねじれの位置の条件である。直線 PQ と交わるのは，**図 1** において×印で示した直線 BE，CF(今回は特に，辺の延長線上で交わるパターンなので要注意)であり，直線 PQ と平行な辺はない。よって，それ以外の辺 AB，AC，DE，DF，AD が直線 PQ とねじれの位置にある。よって，5 本。

図 1



問２　立体 D－BPFQ の底面を四角形 BPFQ としたとき，その高さは点 D と平面 BCFE との距離である（**図２**）。そして，その距離は，△DEF において，点 D から辺 EF におろした垂線 DG の長さに等しい（**図３**）。

まずは，DG の長さを求めよう。

△DEF と△GDF において，∠FDE＝∠FGD＝90°，

∠EFD＝∠DFG より，２組の角がそれぞれ等しいので，

△DEF∽△GDF

よって，ED : DG＝FE : FD　⇒　4 : DG＝5 : 3

⇒　5DG＝12

⇒　$DG=\frac{12}{5}$(cm)

図２

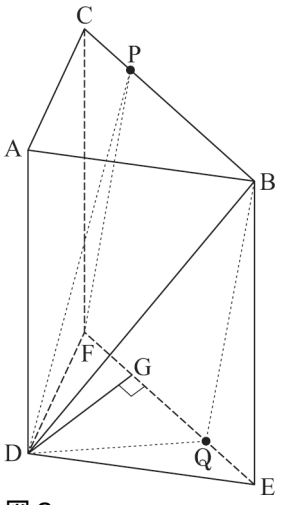
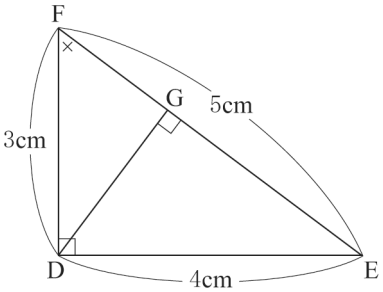


図３



次に，底面 BPFQ の面積を求めよう。

底面 BPFQ は，BP＝QF＝4(cm)，BP//QF より，平行四辺形（**図４**）なので，その面積は，

BP×CF＝4×6＝24(cm^2)

よって，立体 D－BPFQ の体積は，$24\times\frac{12}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{96}{5}$(cm^3)

図４

